

# Modely konkurentných systémov

## Formálne metódy tvorby softvéru

Damas Gruska

Katedra aplikovanej informatiky, I20, [gruska@fmph.uniba.sk](mailto:gruska@fmph.uniba.sk)

# Verifikácia temporálnych vlastností

Chceme zistiť či systém  $P$  ma vlastnosť  $\Phi$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

Chceme zistiť či systém  $P$  ma vlastnosť  $\Phi$ .

Nepriama možnosť:

na to či  $P \models \Phi$  využijeme  $\|\Phi\|^{\mathcal{P}}$  t.j. množinu všetkých procesov z  $\mathcal{P}$ , ktoré spĺňajú  $\Phi$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

Chceme zistiť či systém  $P$  ma vlastnosť  $\Phi$ .

Nepriama možnosť:

na to či  $P \models \Phi$  využijeme  $\|\Phi\|^{\mathcal{P}}$  t.j. množinu všetkých procesov z  $\mathcal{P}$ , ktoré spĺňajú  $\Phi$ .

a overíme pre  $P \in \mathcal{P}$  či  $P \in \|\Phi\|^{\mathcal{P}}$

# Verifikácia temporálnych vlastností

Chceme zistiť či systém  $P$  ma vlastnosť  $\Phi$ .

Nepriama možnosť:

na to či  $P \models \Phi$  využijeme  $\|\Phi\|^{\mathcal{P}}$  t.j. množinu všetkých procesov z  $\mathcal{P}$ , ktoré spĺňajú  $\Phi$ .

a overíme pre  $P \in \mathcal{P}$  či  $P \in \|\Phi\|^{\mathcal{P}}$

Schodná cesta pre malé  $\mathcal{P}$

# Verifikácia temporálnych vlastností

Chceme zistiť či systém  $P$  ma vlastnosť  $\Phi$ .

Nepriama možnosť:

na to či  $P \models \Phi$  využijeme  $\|\Phi\|^{\mathcal{P}}$  t.j. množinu všetkých procesov z  $\mathcal{P}$ , ktoré spĺňajú  $\Phi$ .

a overíme pre  $P \in \mathcal{P}$  či  $P \in \|\Phi\|^{\mathcal{P}}$

Schodná cesta pre malé  $\mathcal{P}$

Ďalšou možnosťou je využiť aproximácie tak ako bolo spomenuté v predchádzajúcom.

Hry

Hry

Hráč 1 a Hráč 2



Hry

Hráč 1 a Hráč 2

Hráč 1 sa snaží ukázať, že  $P \not\models \Phi$

Hry

Hráč 1 a Hráč 2

Hráč 1 sa snaží ukázať, že  $P \not\models \Phi$

Hráč 2 sa snaží ukázať, opak, t.j. že  $P \models \Phi$

# Verifikácia temporálnych vlastností

Hry

Hráč 1 a Hráč 2

Hráč 1 sa snaží ukázať, že  $P \not\models \Phi$

Hráč 2 sa snaží ukázať, opak, t.j. že  $P \models \Phi$

Ak existuje víťazná stratégia pre Hráča 2 (vie vyhrať každú hru)  
tak  $P \models \Phi$ .

Hra so začiatkom  $(P_0, \Phi_0)$  je konečná alebo nekonečná postupnosť

$$(P_0, \Phi_0), (P_1, \Phi_1), \dots, (P_n, \Phi_n), \dots$$

Hra so začiatkom  $(P_0, \Phi_0)$  je konečná alebo nekonečná postupnosť

$$(P_0, \Phi_0), (P_1, \Phi_1), \dots, (P_n, \Phi_n), \dots$$

V stave  $(P_j, \Phi_j)$  ťahá Hráč 1 alebo Hráč 2 v závislosti od  $\Phi_j$ .

Hra so začiatkom  $(P_0, \Phi_0)$  je konečná alebo nekonečná postupnosť

$$(P_0, \Phi_0), (P_1, \Phi_1), \dots, (P_n, \Phi_n), \dots$$

V stave  $(P_j, \Phi_j)$  ťahá Hráč 1 alebo Hráč 2 v závislosti od  $\Phi_j$ .

Hráč 1 ťahá ak  $\Phi_j$  má najvrchnejší operátor  $\wedge, [K], \nu Z, \Psi$

# Verifikácia temporálnych vlastností

Hra so začiatkom  $(P_0, \Phi_0)$  je konečná alebo nekonečná postupnosť

$$(P_0, \Phi_0), (P_1, \Phi_1), \dots, (P_n, \Phi_n), \dots$$

V stave  $(P_j, \Phi_j)$  ťahá Hráč 1 alebo Hráč 2 v závislosti od  $\Phi_j$ .

Hráč 1 ťahá ak  $\Phi_j$  má najvrchnejší operátor  $\wedge, [K], \nu Z. \Psi$

Hráč 2 ťahá ak  $\Phi_j$  má najvrchnejší operátor  $\vee, \langle K \rangle, \mu Z. \Psi$

Nech počiatočná časť hry je:

$$(P_0, \Phi_0), (P_1, \Phi_1), \dots, (P_j, \Phi_j)$$



# Verifikácia temporálnych vlastností

Nech počiatočná časť hry je:

$$(P_0, \Phi_0), (P_1, \Phi_1), \dots, (P_j, \Phi_j)$$

Ak  $\Phi_j = \Psi_1 \wedge \Psi_2$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie  $\Psi_i$  pre  $i = 1$  alebo  $i = 2$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi_i$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

Nech počiatočná časť hry je:

$$(P_0, \Phi_0), (P_1, \Phi_1), \dots, (P_j, \Phi_j)$$

Ak  $\Phi_j = \Psi_1 \wedge \Psi_2$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie  $\Psi_i$  pre  $i = 1$  alebo  $i = 2$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi_i$ .

Ak  $\Phi_j = \Psi_1 \vee \Psi_2$  tak ťahá Hráč 2 a vyberie  $\Psi_i$  pre  $i = 1$  alebo  $i = 2$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi_i$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

Nech počiatočná časť hry je:

$$(P_0, \Phi_0), (P_1, \Phi_1), \dots, (P_j, \Phi_j)$$

Ak  $\Phi_j = \Psi_1 \wedge \Psi_2$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie  $\Psi_i$  pre  $i = 1$  alebo  $i = 2$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi_i$ .

Ak  $\Phi_j = \Psi_1 \vee \Psi_2$  tak ťahá Hráč 2 a vyberie  $\Psi_i$  pre  $i = 1$  alebo  $i = 2$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi_i$ .

Ak  $\Phi_j = [K]\Psi$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie prechod  $P_j \xrightarrow{y} P', y \in K$  a zvolí  $\Phi_{j+1} = \Psi, P_{j+1} = P'$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

Nech počiatočná časť hry je:

$$(P_0, \Phi_0), (P_1, \Phi_1), \dots, (P_j, \Phi_j)$$

Ak  $\Phi_j = \Psi_1 \wedge \Psi_2$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie  $\Psi_i$  pre  $i = 1$  alebo  $i = 2$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi_i$ .

Ak  $\Phi_j = \Psi_1 \vee \Psi_2$  tak ťahá Hráč 2 a vyberie  $\Psi_i$  pre  $i = 1$  alebo  $i = 2$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi_i$ .

Ak  $\Phi_j = [K]\Psi$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie prechod  $P_j \xrightarrow{y} P', y \in K$  a zvolí  $\Phi_{j+1} = \Psi, P_{j+1} = P'$ .

Ak  $\Phi_j = \langle K \rangle \Psi$  tak ťahá Hráč 2 a vyberie prechod  $P_j \xrightarrow{y} P', y \in K$  a zvolí  $\Phi_{j+1} = \Psi, P_{j+1} = P'$ .

Ak  $\Phi_j = \nu Z.\Psi$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie novú konštantu  $U$ ,  
definuje  $U \stackrel{def}{=} \nu Z.\Psi$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = U$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

Ak  $\Phi_j = \nu Z.\Psi$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie novú konštantu  $U$ ,  
definuje  $U \stackrel{def}{=} \nu Z.\Psi$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = U$ .

Ak  $\Phi_j = \mu Z.\Psi$  tak ťahá Hráč 2 a vyberie novú konštantu  $U$ ,  
definuje  $U \stackrel{def}{=} \mu Z.\Psi$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = U$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

Ak  $\Phi_j = \nu Z.\Psi$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie novú konštantu  $U$ , definuje  $U \stackrel{def}{=} \nu Z.\Psi$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = U$ .

Ak  $\Phi_j = \mu Z.\Psi$  tak ťahá Hráč 2 a vyberie novú konštantu  $U$ , definuje  $U \stackrel{def}{=} \mu Z.\Psi$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = U$ .

Ak  $\Phi_j = U$  a  $U = \nu Z.\Psi$  a pre žiadne  $k < j, P_k = P_j, \Phi_k = \Phi_j$  tak Hráč 1 rozvinie prevný bod t.j.  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi[U/Z]$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

Ak  $\Phi_j = \nu Z.\Psi$  tak ťahá Hráč 1 a vyberie novú konštantu  $U$ , definuje  $U \stackrel{def}{=} \nu Z.\Psi$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = U$ .

Ak  $\Phi_j = \mu Z.\Psi$  tak ťahá Hráč 2 a vyberie novú konštantu  $U$ , definuje  $U \stackrel{def}{=} \mu Z.\Psi$  a  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = U$ .

Ak  $\Phi_j = U$  a  $U = \nu Z.\Psi$  a pre žiadne  $k < j, P_k = P_j, \Phi_k = \Phi_j$  tak Hráč 1 rozvinie prevný bod t.j.  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi[U/Z]$ .

Ak  $\Phi_j = U$  a  $U = \mu Z.\Psi$  a pre žiadne  $k < j, P_k = P_j, \Phi_k = \Phi_j$  tak Hráč 2 rozvinie prevný bod t.j.  $P_{j+1} = P_j, \Phi_{j+1} = \Psi[U/Z]$ .



Pravidlá sú spätne zdravé, t.j.:

Pravidlá sú spätne zdravé, t.j.:

ak Hráč 1 urobí ťah z  $j$  do  $j + 1$  tak ak  $P_{j+1} \not\models \Phi_{j+1}$  potom  $P_j \not\models \Phi_j$ ,

Pravidlá sú spätne zdravé, t.j.:

ak Hráč 1 urobí ťah z  $j$  do  $j + 1$  tak ak  $P_{j+1} \not\models \Phi_{j+1}$  potom  $P_j \not\models \Phi_j$ ,

ak Hráč 2 urobí ťah z  $j$  do  $j + 1$  tak ak  $P_{j+1} \models \Phi_{j+1}$  potom  $P_j \models \Phi_j$ .

Hráč vyhráva, ak oponent nemôže ťahať.

Hráč vyhráva, ak oponent nemôže ťahať.

Hráč 1 nemôže ťahať ak v konfigurácií  $\Phi_j = [K]\Psi$  neexistuje prechod  $P_j \xrightarrow{y} P', y \in K$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

Hráč vyhráva, ak oponent nemôže ťahať.

Hráč 1 nemôže ťahať ak v konfigurácií  $\Phi_j = [K]\Psi$  neexistuje prechod  $P_j \xrightarrow{y} P', y \in K$ .

Hráč 2 nemôže ťahať ak v konfigurácií  $\Phi_j = \langle K \rangle \Psi$  neexistuje prechod  $P_j \xrightarrow{y} P', y \in K$ .

# Verifikácia temporálnych vlastností

$$\begin{array}{l} \vdots \\ U \stackrel{def}{=} \nu Z. \Psi \\ P_k \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ U \stackrel{def}{=} \mu Z. \Psi \\ P_k \end{array}$$

# Verifikácia temporálnych vlastností

$$\vdots$$
$$U \stackrel{def}{=} \nu Z. \Psi$$

$$P_k$$
$$(P_k, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_j, U)$$
$$P_k = P_j$$

$$\vdots$$
$$U \stackrel{def}{=} \mu Z. \Psi$$

$$P_k$$
$$(P_k, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_j, U)$$
$$P_k = P_j$$



# Verifikácia temporálnych vlastností

$$\vdots$$
$$U \stackrel{def}{=} \nu Z. \Psi$$

$$P_k$$
$$(P_k, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_j, U)$$
$$P_k = P_j$$

Hráč 2 vyhráva

$$\vdots$$
$$U \stackrel{def}{=} \mu Z. \Psi$$

$$P_k$$
$$(P_k, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_j, U)$$
$$P_k = P_j$$

Hráč 1 vyhráva

Prípád nekonečných hier:

Prípád nekonečných hier:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ U \stackrel{def}{=} \nu Z. \Psi \\ P_k \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ U \stackrel{def}{=} \mu Z. \Psi \\ P_k \end{array}$$

# Verifikácia temporálnych vlastností

Prípád nekonečných hier:

$$\begin{array}{l} \vdots \\ U \stackrel{def}{=} \nu Z. \Psi \\ P_k \\ (P_k, U) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ U \stackrel{def}{=} \mu Z. \Psi \\ P_k \\ (P_k, U) \end{array}$$

Prípád nekonečných hier:

$$\vdots$$
$$U \stackrel{def}{=} \nu Z. \Psi$$

$$P_k$$
$$(P_k, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_j, U)$$

$$\vdots$$
$$U \stackrel{def}{=} \mu Z. \Psi$$

$$P_k$$
$$(P_k, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_j, U)$$

# Verifikácia temporálnych vlastností

Prípád nekonečných hier:

$$\vdots$$
$$U \stackrel{def}{=} \nu Z. \Psi$$

$$P_k$$
$$(P_k, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_j, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_n, U)$$

$$\vdots$$
$$U \stackrel{def}{=} \mu Z. \Psi$$

$$P_k$$
$$(P_k, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_j, U)$$

$$\vdots$$
$$(P_n, U)$$

# Verifikácia temporálnych vlastností

Prípád nekonečných hier:

$$\vdots \\ U \stackrel{def}{=} \nu Z. \Psi$$

$$P_k \\ (P_k, U)$$

$$\vdots \\ (P_j, U)$$

$$\vdots \\ (P_n, U)$$

Hráč 2 vyhráva

$$\vdots \\ U \stackrel{def}{=} \mu Z. \Psi$$

$$P_k \\ (P_k, U)$$

$$\vdots \\ (P_j, U)$$

$$\vdots \\ (P_n, U)$$

Hráč 1 vyhráva

## Theorem

$P \models \Phi$  iff Hráč 2 má víťaznú stratégiu v hre s počiatkom  $(P, \Phi)$ .



Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle . Z$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$

$$(C1''', \nu Z. \langle tick \rangle .Z)$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle . Z$$

$$(C1''', \nu Z. \langle tick \rangle . Z)$$

$\downarrow 1$

$$(C1''', U)$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$

$$(C1''', \nu Z. \langle tick \rangle .Z)$$

$\downarrow 1$

$$(C1''', U)$$

$\downarrow 1$

$$(C1''', \langle tick \rangle .U)$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$

$$(C1''', \nu Z. \langle tick \rangle .Z)$$

$\downarrow 1$

$$(C1''', U)$$

$\downarrow 1$

$$(C1''', \langle tick \rangle .U)$$

$\downarrow 2$

$$(C1''', U)$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle . Z$$

$$(C1''', \nu Z. \langle tick \rangle . Z)$$

↓ 1

$$(C1''', U)$$

↓ 1

$$(C1''', \langle tick \rangle . U)$$

↓ 2

$$(C1''', U)$$

Hráč 2 vyhráva.

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$



Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \mu Z.[tick].Z$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \mu Z.[tick].Z$$

$$(C1''', \mu Z.[tick].Z)$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \mu Z.[tick].Z$$

$$(C1''', \mu Z.[tick].Z)$$

$\downarrow 2$

$$(C1''', U)$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \mu Z.[tick].Z$$

$$(C1''', \mu Z.[tick].Z)$$

$\downarrow 2$

$$(C1''', U)$$

$\downarrow 2$

$$(C1''', [tick].U)$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \mu Z.[tick].Z$$

$$(C1''', \mu Z.[tick].Z)$$

$\downarrow 2$

$$(C1''', U)$$

$\downarrow 2$

$$(C1''', [tick].U)$$

$\downarrow 1$

$$(C1''', U)$$

Príklad.

$$C1''' = tick.C1''' + tick.Nil$$

$$\Phi = \mu Z.[tick].Z$$

$$(C1''', \mu Z.[tick].Z)$$

↓ 2

$$(C1''', U)$$

↓ 2

$$(C1''', [tick].U)$$

↓ 1

$$(C1''', U)$$

Hráč 1 vyhráva.

Dokazujeme, že Hráč 2 má vítaznou strategiu.

Dokazujeme, že Hráč 2 má vítěznou strategii.

$P \vdash \Phi$  syntaktická obdoba  $P \models \Phi$



Dokazujeme, že Hráč 2 má vítaznou strategiu.

$P \vdash \Phi$  syntaktická obdoba  $P \models \Phi$

Dokazovacie pravidlá:

Dokazujeme, že Hráč 2 má vítaznou strategii.

$P \vdash \Phi$  syntaktická obdoba  $P \models \Phi$

Dokazovací pravidlá:

$$\frac{P \vdash \Phi}{P_1 \vdash \Phi_1, \dots, P_n \vdash \Phi_n}$$

Dokazujeme, že Hráč 2 má vítaznú stratégiu.

$P \vdash \Phi$  syntaktická obdoba  $P \models \Phi$

Dokazovacie pravidlá:

$$\frac{P \vdash \Phi}{P_1 \vdash \Phi_1, \dots, P_n \vdash \Phi_n}$$

$P \vdash \Phi$  - cieľ

Dokazujeme, že Hráč 2 má víťaznú stratégiu.

$P \vdash \Phi$  syntaktická obdoba  $P \models \Phi$

Dokazovacie pravidlá:

$$\frac{P \vdash \Phi}{P_1 \vdash \Phi_1, \dots, P_n \vdash \Phi_n}$$

$P \vdash \Phi$  - cieľ

$P_i \vdash \Phi_i$  - podciele

Dokazujeme, že Hráč 2 má víťaznú stratégiu.

$P \vdash \Phi$  syntaktická obdoba  $P \models \Phi$

Dokazovacie pravidlá:

$$\frac{P \vdash \Phi}{P_1 \vdash \Phi_1, \dots, P_n \vdash \Phi_n}$$

$P \vdash \Phi$  - cieľ

$P_i \vdash \Phi_i$  - podciele

môže to mať aj vedľajšie podmienky.

$$\frac{P \vdash \Phi \wedge \Psi}{P \vdash \Phi, P \vdash \Psi}$$

$$\frac{P \vdash \Phi \wedge \Psi}{P \vdash \Phi, P \vdash \Psi}$$

$$\frac{P \vdash \Phi \vee \Psi}{P \vdash \Phi}$$

$$\frac{P \vdash \Phi \wedge \Psi}{P \vdash \Phi, P \vdash \Psi}$$

$$\frac{P \vdash \Phi \vee \Psi}{P \vdash \Phi}$$

$$\frac{P \vdash \Phi \vee \Psi}{P \vdash \Psi}$$



$$\frac{P \vdash [K]\Psi}{P_1 \vdash \Psi, \dots, P_n \vdash \Psi} \quad \{P' \mid P \xrightarrow{y} P', y \in K\} = \{P_1, \dots, P_n\}$$

$$\frac{P \vdash [K]\Psi}{P_1 \vdash \Psi, \dots, P_n \vdash \Psi} \quad \{P' \mid P \xrightarrow{y} P', y \in K\} = \{P_1, \dots, P_n\}$$

$$\frac{P \vdash \langle K \rangle \Psi}{P' \vdash \Psi} \quad P \xrightarrow{y} P', y \in K$$

$$\frac{P \vdash \sigma Z. \Psi}{P \vdash U} \quad U \stackrel{\text{def}}{=} \sigma Z. \Psi \text{ a } U \text{ je nová konštanta}$$

$$\frac{P \vdash \sigma Z. \Psi}{P \vdash U} \quad U \stackrel{\text{def}}{=} \sigma Z. \Psi \text{ a } U \text{ je nová konštanta}$$

$$\frac{P \vdash U}{P \vdash \Psi[U/Z]} \quad U \stackrel{\text{def}}{=} \sigma Z. \Psi$$

System je spätne zdravý.

System je spätne zdravý.

Ak platí záver, tak platí i predpoklad.

System je spätne zdravý.

Ak platí záver, tak platí i predpoklad.

Ak chceme zistiť či  $P \models \Phi$  tak vytvoríme tablo pre cieľ  $P \vdash \Phi$ .

System je spätne zdravý.

Ak platí záver, tak platí i predpoklad.

Ak chceme zistiť či  $P \models \Phi$  tak vytvoríme tablo pre cieľ  $P \vdash \Phi$ .

Vznikne strom s koreňom  $P \vdash \Phi$ . Ak je konečný a listy sú true, tak true je i cieľ.



System je spätne zdravý.

Ak platí záver, tak platí i predpoklad.

Ak chceme zistiť či  $P \models \Phi$  tak vytvoríme tablo pre cieľ  $P \vdash \Phi$ .

Vznikne strom s koreňom  $P \vdash \Phi$ . Ak je konečný a listy sú true, tak true je i cieľ.

Predchádzajúce pravidlá aplikujeme len na vrcholy, ktoré nie sú terminálne.

Vrchol  $P \vdash \Psi$  je terminálny ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

Vrchol  $P \vdash \Psi$  je terminálny ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

Úspešná terminácia

Vrchol  $P \vdash \Psi$  je terminálny ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

Úspešná terminácia

1.  $\Psi = [K]\Phi$  a  $\{P' \mid P \xrightarrow{y} P', y \in K\} = \emptyset$

Vrchol  $P \vdash \Psi$  je terminálny ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

Úspešná terminácia

1.  $\Psi = [K]\Phi$  a  $\{P' \mid P \xrightarrow{y} P', y \in K\} = \emptyset$
2.  $\Psi = U$  a  $U = \nu Z.\Phi$  a existuje vrchol vyššie  $P \vdash \Psi$

Vrchol  $P \vdash \Psi$  je terminálny ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

Úspešná terminácia

1.  $\Psi = [K]\Phi$  a  $\{P' \mid P \xrightarrow{y} P', y \in K\} = \emptyset$
2.  $\Psi = U$  a  $U = \nu Z.\Phi$  a existuje vrchol vyššie  $P \vdash \Psi$

Neúspešná terminácia

Vrchol  $P \vdash \Psi$  je terminálny ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

Úspešná terminácia

1.  $\Psi = [K]\Phi$  a  $\{P' \mid P \xrightarrow{y} P', y \in K\} = \emptyset$
2.  $\Psi = U$  a  $U = \nu Z.\Phi$  a existuje vrchol vyššie  $P \vdash \Psi$

Neúspešná terminácia

- 1'.  $\Psi = \langle K \rangle \Phi$  a  $\{P' \mid P \xrightarrow{y} P', y \in K\} = \emptyset$

Vrchol  $P \vdash \Psi$  je terminálny ak platí jedna z nasledujúcich podmienok:

Úspešná terminácia

1.  $\Psi = [K]\Phi$  a  $\{P' \mid P \xrightarrow{y} P', y \in K\} = \emptyset$
2.  $\Psi = U$  a  $U = \nu Z.\Phi$  a existuje vrchol vyššie  $P \vdash \Psi$

Neúspešná terminácia

- 1'.  $\Psi = \langle K \rangle \Phi$  a  $\{P' \mid P \xrightarrow{y} P', y \in K\} = \emptyset$
- 2'.  $\Psi = U$  a  $U = \mu Z.\Phi$  a existuje vrchol vyššie  $P \vdash \Psi$



## Definition

Úspešné tablo pre  $P \vdash \Psi$  je konečný strom s koreňom  $P \vdash \Psi$  a všetkými listami s úspešnou termináciou.

## Definition

Úspešné tablo pre  $P \vdash \Psi$  je konečný strom s koreňom  $P \vdash \Psi$  a všetkými listami s úspešnou termináciou.

## Theorem

*Ak  $P \vdash \Psi$  má úspešné tablo tak potom  $P \models \Psi$ .*

Príklad.

$CI = tick.CI$

Príklad.

$$CI = tick.CI$$
$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$

Príklad.

$$Cl = tick.Cl$$
$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$
$$Cl \vdash \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$

Príklad.

$$C1 = tick.C1$$
$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$
$$C1 \vdash \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$

---

$U \stackrel{def}{=} \nu Z. \langle tick \rangle Z$  a  $U$  je nová konštanta

Príklad.

$$C1 = tick.C1$$
$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$
$$C1 \vdash \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$
$$\frac{}{C1 \vdash U} \quad U \stackrel{def}{=} \nu Z. \langle tick \rangle Z \text{ a } U \text{ je nová konštanta}$$

Príklad.

$$C1 = tick.C1$$
$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$
$$C1 \vdash \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$

---

$$U \stackrel{def}{=} \nu Z. \langle tick \rangle Z \text{ a } U \text{ je nová konštanta}$$
$$C1 \vdash U$$

---

$$C1 \vdash \langle tick \rangle U$$



Príklad.

$$Cl = tick.Cl$$
$$\Phi = \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$
$$Cl \vdash \nu Z. \langle tick \rangle .Z$$

---

$$U \stackrel{def}{=} \nu Z. \langle tick \rangle Z \text{ a } U \text{ je nová konštanta}$$
$$Cl \vdash U$$

---

$$Cl \vdash \langle tick \rangle U$$

---

$$Cl \vdash U$$

Príklad.

$CI = tick.CI$

Príklad.

$$Cl = tick.Cl$$

$$\Phi = \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z)$$

Príklad.

$$Cl = tick.Cl$$

$$\Phi = \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

$$Cl \vdash \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

Príklad.

$$Cl = tick.Cl$$

$$\Phi = \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

$$Cl \vdash \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

$$\frac{}{U \stackrel{def}{=} \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z}$$

Príklad.

$$Cl = tick.Cl$$

$$\Phi = \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

$$Cl \vdash \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

$$\frac{}{Cl \vdash U} \quad U \stackrel{def}{=} \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

Príklad.

$$Cl = tick.Cl$$

$$\Phi = \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

$$Cl \vdash \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

$$\frac{}{Cl \vdash U} \quad U \stackrel{def}{=} \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z$$

$$Cl \vdash U$$

$$Cl \vdash ([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].U$$

Príklad.

$$C1 = tick.C1$$

$$\Phi = \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z)$$

$$C1 \vdash \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z)$$

$$\frac{}{C1 \vdash U} \quad U \stackrel{def}{=} \nu Z.([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].Z)$$

$$C1 \vdash U$$

$$C1 \vdash ([\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt) \wedge [-].U$$

$$C1 \vdash [\neg tick]ff \wedge \langle - \rangle tt$$

$$C1 \vdash [-].U$$



Príklad.

$$C1 = tick.C1$$

$$\Phi = \nu Z.(([-tick]ff \wedge <- > tt) \wedge [-].Z)$$

$$C1 \vdash \nu Z.(([-tick]ff \wedge <- > tt) \wedge [-].Z)$$

$$\frac{}{C1 \vdash U} \quad U \stackrel{def}{=} \nu Z.(([-tick]ff \wedge <- > tt) \wedge [-].Z)$$

$$C1 \vdash U$$

$$C1 \vdash ([-tick]ff \wedge <- > tt) \wedge [-].U$$

$$C1 \vdash [-tick]ff \wedge <- > tt$$

$$C1 \vdash [-].U$$

$$C1 \vdash [-tick]ff \quad C1 \vdash <- > tt$$

$$C1 \vdash U$$

Príklad.

$$C1 = tick.C1$$

$$\Phi = \nu Z.(([-tick]ff \wedge <- > tt) \wedge [-].Z)$$

$$C1 \vdash \nu Z.(([-tick]ff \wedge <- > tt) \wedge [-].Z)$$

$$\frac{}{C1 \vdash U} \quad U \stackrel{def}{=} \nu Z.(([-tick]ff \wedge <- > tt) \wedge [-].Z)$$

$$C1 \vdash U$$

$$C1 \vdash ([-tick]ff \wedge <- > tt) \wedge [-].U$$

$$C1 \vdash [-tick]ff \wedge <- > tt$$

$$C1 \vdash [-].U$$

$$C1 \vdash [-tick]ff$$

$$C1 \vdash <- > tt$$

$$C1 \vdash U$$

$$C1 \vdash tt$$

## Theorem

*Ak  $P$  má konečne veľa stavov a  $P \models \Psi$  potom  $P \vdash \Psi$  má úspešné tablo.*

# Parity game pre konečnostavové systémy

Parity game je orientovaný graf  $G = (N, \rightarrow, L)$  kde

# Parity game pre konečnostavové systémy

Parity game je orientovaný graf  $G = (N, \rightarrow, L)$  kde

množina vrcholov  $N$  je konečná podmnožina množiny prirodzených čísel,

# Parity game pre konečnosťavové systémy

Parity game je orientovaný graf  $G = (N, \rightarrow, L)$  kde

množina vrcholov  $N$  je konečná podmnožina množiny prirodzených čísel,

$\rightarrow$  reprezentuje hrany (budeme písať  $i \rightarrow j$  miesto  $(i, j) \in \rightarrow$ )

# Parity game pre konečnosťavové systémy

Parity game je orientovaný graf  $G = (N, \rightarrow, L)$  kde

množina vrcholov  $N$  je konečná podmnožina množiny prirodzených čísel,

$\rightarrow$  reprezentuje hrany (budeme písať  $i \rightarrow j$  miesto  $(i, j) \in \rightarrow$ )

Vrcholy sú pozície v hre.

# Parity game pre konečnosťavové systémy

Parity game je orientovaný graf  $G = (N, \rightarrow, L)$  kde

množina vrcholov  $N$  je konečná podmnožina množiny prirodzených čísel,

$\rightarrow$  reprezentuje hrany (budeme písať  $i \rightarrow j$  miesto  $(i, j) \in \rightarrow$ )

Vrcholy sú pozície v hre.

$L(i)$  hovorí, ktorý hráč je na ťahu.



# Parity game pre konečnosťavové systémy

Parity game je orientovaný graf  $G = (N, \rightarrow, L)$  kde

množina vrcholov  $N$  je konečná podmnožina množiny prirodzených čísel,

$\rightarrow$  reprezentuje hrany (budeme písať  $i \rightarrow j$  miesto  $(i, j) \in \rightarrow$ )

Vrcholy sú pozície v hre.

$L(i)$  hovorí, ktorý hráč je na ťahu.

Predpokladáme, že z každého vrcholu vedie aspoň jedna hrana.  
(hra má nekonečnú dĺžku)

# Parity game pre konečnosťavové systémy

Parity game je orientovaný graf  $G = (N, \rightarrow, L)$  kde

množina vrcholov  $N$  je konečná podmnožina množiny prirodzených čísel,

$\rightarrow$  reprezentuje hrany (budeme písať  $i \rightarrow j$  miesto  $(i, j) \in \rightarrow$ )

Vrcholy sú pozície v hre.

$L(i)$  hovorí, ktorý hráč je na ťahu.

Predpokladáme, že z každého vrcholu vedie aspoň jedna hrana.  
(hra má nekonečnú dĺžku)

Hra začína v najmenšom vrchole.

# Parity game pre konečnosťavové systémy

Parity game je orientovaný graf  $G = (N, \rightarrow, L)$  kde

množina vrcholov  $N$  je konečná podmnožina množiny prirodzených čísel,

$\rightarrow$  reprezentuje hrany (budeme písať  $i \rightarrow j$  miesto  $(i, j) \in \rightarrow$ )

Vrcholy sú pozície v hre.

$L(i)$  hovorí, ktorý hráč je na ťahu.

Predpokladáme, že z každého vrcholu vedie aspoň jedna hrana.  
(hra má nekonečnú dĺžku)

Hra začína v najmenšom vrchole.

Hráč, ktorý je na ťahu vyberie nasledujúcu "vychádzajúcu" pozíciu.

# Parity game pre konečnosťavové systémy

Parity game je orientovaný graf  $G = (N, \rightarrow, L)$  kde

množina vrcholov  $N$  je konečná podmnožina množiny prirodzených čísel,

$\rightarrow$  reprezentuje hrany (budeme písať  $i \rightarrow j$  miesto  $(i, j) \in \rightarrow$ )

Vrcholy sú pozície v hre.

$L(i)$  hovorí, ktorý hráč je na ťahu.

Predpokladáme, že z každého vrcholu vedie aspoň jedna hrana.  
(hra má nekonečnú dĺžku)

Hra začína v najmenšom vrchole.

Hráč, ktorý je na ťahu vyberie nasledujúcu "vychádzajúcu" pozíciu.

Hra je nekonečná, víťaz sa určí podľa najmenšieho vrcholu, ktorý sa vyskytuje nekonečne veľa krát v hre podľa  $L$ .

# Parity game

# Parity game

Ideme ukázat  $E \models_v \Phi$

# Parity game

Ideme ukázat  $E \models_v \Phi$

Nech  $\{E_1, \dots, E_m\} = P(E)$  a  $E_1 = E$ .

Ideme ukázať  $E \models_v \Phi$

Nech  $\{E_1, \dots, E_m\} = P(E)$  a  $E_1 = E$ .

Nech  $Z_1, \dots, Z_k$  sú všetky viazané premenné v  $\Phi$ .



Ideme ukázať  $E \models_v \Phi$

Nech  $\{E_1, \dots, E_m\} = P(E)$  a  $E_1 = E$ .

Nech  $Z_1, \dots, Z_k$  sú všetky viazané premenné v  $\Phi$ .

Nech  $\Phi_1, \dots, \Phi_l$  je množina podformúl  $\Phi$ , okrem proпозиčných premenných, zoradených od najväčšej t.j.  $\Phi = \Phi_1$ .

Ideme ukázať  $E \models_v \Phi$

Nech  $\{E_1, \dots, E_m\} = P(E)$  a  $E_1 = E$ .

Nech  $Z_1, \dots, Z_k$  sú všetky viazané premenné v  $\Phi$ .

Nech  $\Phi_1, \dots, \Phi_l$  je množina podformúl  $\Phi$ , okrem propozičných premenných, zoradených od najväčšej t.j.  $\Phi = \Phi_1$ .

Do tohoto zoznamu vložíme  $Z_i$  za  $\sigma Z_i. \Psi_i$ , takto dostaneme zoznam  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$

Ideme ukázať  $E \models_v \Phi$

Nech  $\{E_1, \dots, E_m\} = P(E)$  a  $E_1 = E$ .

Nech  $Z_1, \dots, Z_k$  sú všetky viazané premenné v  $\Phi$ .

Nech  $\Phi_1, \dots, \Phi_l$  je množina podformúl  $\Phi$ , okrem propozičných premenných, zoradených od najväčšej t.j.  $\Phi = \Phi_1$ .

Do tohoto zoznamu vložíme  $Z_i$  za  $\sigma Z_i \cdot \Psi_i$ , takto dostaneme zoznam  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$

Pozície v hre sú dvojice

$$(E_1, \Phi_1), \dots, (E_m, \Phi_1), (E_1, \Phi_2), \dots, (E_1, \Phi_n) \dots, (E_m, \Phi_n)$$

Ideme ukázať  $E \models_v \Phi$

Nech  $\{E_1, \dots, E_m\} = P(E)$  a  $E_1 = E$ .

Nech  $Z_1, \dots, Z_k$  sú všetky viazané premenné v  $\Phi$ .

Nech  $\Phi_1, \dots, \Phi_l$  je množina podformúl  $\Phi$ , okrem propozičných premenných, zoradených od najväčšej t.j.  $\Phi = \Phi_1$ .

Do tohoto zoznamu vložíme  $Z_i$  za  $\sigma Z_i. \Psi_i$ , takto dostaneme zoznam  $\Phi_1, \dots, \Phi_n$

Pozície v hre sú dvojice

$$(E_1, \Phi_1), \dots, (E_m, \Phi_1), (E_1, \Phi_2), \dots, (E_1, \Phi_n) \dots, (E_m, \Phi_n)$$

Množina vrcholov je  $\{1, \dots, m \times n\}$

Každý vrchol  $i = m \times (k - 1) + j$  reprezentuje  $(E_j, \Phi_k)$ .

Ideme teraz definovať  $\rightarrow$  a  $L$  pre pozíciu  $(F, \Psi)$  reprezentujúcu  $i$ .

Ideme teraz definovať  $\rightarrow$  a  $L$  pre pozíciu  $(F, \Psi)$  reprezentujúcu  $i$ .

Ak  $\Psi$  je  $Z$  a  $Z$  je voľná v pôvodnej formule a  $F \in v(Z)$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$ . Ak  $F \notin v(Z)$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$

Ideme teraz definovať  $\rightarrow$  a  $L$  pre pozíciu  $(F, \Psi)$  reprezentujúcu  $i$ .

Ak  $\Psi$  je  $Z$  a  $Z$  je voľná v pôvodnej formule a  $F \in v(Z)$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$ . Ak  $F \notin v(Z)$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$

Ak  $\Psi$  je  $tt$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$ .

Ideme teraz definovať  $\rightarrow$  a  $L$  pre pozíciu  $(F, \Psi)$  reprezentujúcu  $i$ .

Ak  $\Psi$  je  $Z$  a  $Z$  je voľná v pôvodnej formule a  $F \in v(Z)$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$ . Ak  $F \notin v(Z)$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$

Ak  $\Psi$  je  $tt$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$ .

Ak  $\Psi$  je  $ff$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$ .



# Parity game

Ak  $\Psi$  je  $\Psi_1 \wedge \Psi_2$  tak  $L(i) = H1$  a existujú hrany  $i \rightarrow j1$  a  $i \rightarrow j2$  kde  $j1$  reprezentuje  $(F, \Psi_1)$  a  $j2$  reprezentuje  $(F, \Psi_2)$  .

Ak  $\Psi$  je  $\Psi_1 \wedge \Psi_2$  tak  $L(i) = H1$  a existujú hrany  $i \rightarrow j1$  a  $i \rightarrow j2$  kde  $j1$  reprezentuje  $(F, \Psi_1)$  a  $j2$  reprezentuje  $(F, \Psi_2)$  .

Ak  $\Psi$  je  $\Psi_1 \vee \Psi_2$  tak  $L(i) = H2$  a existujú hrany  $i \rightarrow j1$  a  $i \rightarrow j2$  kde  $j1$  reprezentuje  $(F, \Psi_1)$  a  $j2$  reprezentuje  $(F, \Psi_2)$  .

Ak  $\Psi$  je  $\Psi_1 \wedge \Psi_2$  tak  $L(i) = H1$  a existujú hrany  $i \rightarrow j1$  a  $i \rightarrow j2$  kde  $j1$  reprezentuje  $(F, \Psi_1)$  a  $j2$  reprezentuje  $(F, \Psi_2)$  .

Ak  $\Psi$  je  $\Psi_1 \vee \Psi_2$  tak  $L(i) = H2$  a existujú hrany  $i \rightarrow j1$  a  $i \rightarrow j2$  kde  $j1$  reprezentuje  $(F, \Psi_1)$  a  $j2$  reprezentuje  $(F, \Psi_2)$  .

Ak  $\Psi$  je  $\langle K \rangle \Psi'$  a  $\{F' | F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$

Ak  $\Psi$  je  $\Psi_1 \wedge \Psi_2$  tak  $L(i) = H1$  a existujú hrany  $i \rightarrow j1$  a  $i \rightarrow j2$  kde  $j1$  reprezentuje  $(F, \Psi_1)$  a  $j2$  reprezentuje  $(F, \Psi_2)$  .

Ak  $\Psi$  je  $\Psi_1 \vee \Psi_2$  tak  $L(i) = H2$  a existujú hrany  $i \rightarrow j1$  a  $i \rightarrow j2$  kde  $j1$  reprezentuje  $(F, \Psi_1)$  a  $j2$  reprezentuje  $(F, \Psi_2)$  .

Ak  $\Psi$  je  $\langle K \rangle \Psi'$  a  $\{F' | F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$

Ak  $\Psi$  je  $\langle K \rangle \Psi'$  a  $\{F' | F \xrightarrow{x} F', x \in K\} \neq \emptyset$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow j$  pre každé  $j$  reprezentujúce pozíciu  $(F', \Psi')$  pre  $F \xrightarrow{x} F'$  a  $x \in K$ .

# Parity game

Ak  $\Psi$  je  $[K]\Psi'$  a  $\{F' \mid F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$

Ak  $\Psi$  je  $[K]\Psi'$  a  $\{F' \mid F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$

Ak  $\Psi$  je  $[K]\Psi'$  a  $\{F' \mid F \xrightarrow{x} F', x \in K\} \neq \emptyset$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow j$  pre každé  $j$  reprezentujúce pozíciu  $(F', \Psi')$  pre  $F \xrightarrow{x} F'$  a  $x \in K$ .



Ak  $\Psi$  je  $[K]\Psi'$  a  $\{F' \mid F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$

Ak  $\Psi$  je  $[K]\Psi'$  a  $\{F' \mid F \xrightarrow{x} F', x \in K\} \neq \emptyset$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow j$  pre každé  $j$  reprezentujúce pozíciu  $(F', \Psi')$  pre  $F \xrightarrow{x} F'$  a  $x \in K$ .

Ak  $\Psi$  je  $\nu Z_j.\Psi_j$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow j'$  kde  $j'$  reprezentujúce pozíciu  $(F, Z_j)$ .

Ak  $\Psi$  je  $[K]\Psi'$  a  $\{F' \mid F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow i$

Ak  $\Psi$  je  $[K]\Psi'$  a  $\{F' \mid F \xrightarrow{x} F', x \in K\} \neq \emptyset$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow j$  pre každé  $j$  reprezentujúce pozíciu  $(F', \Psi')$  pre  $F \xrightarrow{x} F'$  a  $x \in K$ .

Ak  $\Psi$  je  $\nu Z_j.\Psi_j$  tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow j'$  kde  $j'$  reprezentujúce pozíciu  $(F, Z_j)$ .

Ak  $\Psi$  je  $\mu Z_j.\Psi_j$  tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow j'$  kde  $j'$  reprezentujúce pozíciu  $(F, Z_j)$ .

# Parity game

Ak  $\Psi$  je  $Z_j$  a  $\nu Z_j.\Psi_j$  je podformula  $\Phi$ , tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow j'$  kde  $j'$  reprezentujúce pozíciu  $(F, \Psi_j)$ .

Ak  $\Psi$  je  $Z_j$  a  $\nu Z_j.\Psi_j$  je podformula  $\Phi$ , tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow j'$  kde  $j'$  reprezentujúce pozíciu  $(F, \Psi_j)$ .

Ak  $\Psi$  je  $Z_j$  a  $\mu Z_j.\Psi_j$  je podformula  $\Phi$ , tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow j'$  kde  $j'$  reprezentujúce pozíciu  $(F, \Psi_j)$ .

Ak  $\Psi$  je  $Z_j$  a  $\nu Z_j.\Psi_j$  je podformula  $\Phi$ , tak  $L(i) = H2$  a existuje hrana  $i \rightarrow j'$  kde  $j'$  reprezentujúce pozíciu  $(F, \Psi_j)$ .

Ak  $\Psi$  je  $Z_j$  a  $\mu Z_j.\Psi_j$  je podformula  $\Phi$ , tak  $L(i) = H1$  a existuje hrana  $i \rightarrow j'$  kde  $j'$  reprezentujúce pozíciu  $(F, \Psi_j)$ .

Odstránime vrcholy, ktoré nie sú dosiahnuteľné z počiatočného vrcholu.

# Parity game

Najmenší vrchol, ktorý sa vyskytne nekonečne veľa krát v hre, má jeden z tvarov:



Najmenší vrchol, ktorý sa vyskytne nekonečne veľa krát v hre, má jeden z tvarov:

$(F, Z)$  kde  $Z$  je voľná.

Najmenší vrchol, ktorý sa vyskytne nekonečne veľa krát v hre, má jeden z tvarov:

$(F, Z)$  kde  $Z$  je voľná.

$(F, tt)$

Najmenší vrchol, ktorý sa vyskytne nekonečne veľa krát v hre, má jeden z tvarov:

$(F, Z)$  kde  $Z$  je voľná.

$(F, tt)$

$(F, ff)$

Najmenší vrchol, ktorý sa vyskytne nekonečne veľa krát v hre, má jeden z tvarov:

$(F, Z)$  kde  $Z$  je voľná.

$(F, tt)$

$(F, ff)$

$(F, [K]\Psi)$  a  $\{F' \mid F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$

Najmenší vrchol, ktorý sa vyskytne nekonečne veľa krát v hre, má jeden z tvarov:

$(F, Z)$  kde  $Z$  je voľná.

$(F, tt)$

$(F, ff)$

$(F, [K]\Psi)$  a  $\{F' | F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$

$(F, \langle K \rangle \Psi)$  a  $\{F' | F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$

Najmenší vrchol, ktorý sa vyskytne nekonečne veľa krát v hre, má jeden z tvarov:

$(F, Z)$  kde  $Z$  je voľná.

$(F, tt)$

$(F, ff)$

$(F, [K]\Psi)$  a  $\{F' | F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$

$(F, \langle K \rangle \Psi)$  a  $\{F' | F \xrightarrow{x} F', x \in K\} = \emptyset$

$(F, Z_j)$