

# Modely konkurentných systémov

## Formálne metódy tvorby softvéru

Damas Gruska

Katedra aplikovanej informatiky, I20, damas.gruska@gmail.com

Prednáška 1.

Organizácia kurzu v čase pandémie:

Organizácia kurzu v čase pandémie:

Prednášky nájdete na tejto stránke, vždy v deň, kedy sú v rozvrhu.

Organizácia kurzu v čase pandémie:

Prednášky nájdete na tejto stránke, vždy v deň, kedy sú v rozvrhu.

Budete dostávať domáce úlohy, ich odovzdanie je povinné v termíne do nasledovnej prednášky. Toleruje sa max jedna úloha odovzdaná po termíne. Riešenia mi posielajte ako jedno pdf-ko (ak nebude uvedené inak), kľudne to môže byť aj rukou písané.

Organizácia kurzu v čase pandémie:

Prednášky nájdete na tejto stránke, vždy v deň, kedy sú v rozvrhu.

Budete dostávať domáce úlohy, ich odovzdanie je povinné v termíne do nasledovnej prednášky. Toleruje sa max jedna úloha odovzdaná po termíne. Riešenia mi posielajte ako jedno pdf-ko (ak nebude uvedené inak), kľudne to môže byť aj rukou písané.

Cvičenia budú pre tých, ktorí mali problém s úlohou alebo si nie sú istí, či majú dobre vyriešenú úlohu. Spočiatku budu formou konzultácií (vždy napíšte, ak máte otázku!!) neskôr možno teamsov.

Organizácia kurzu v čase pandémie:

Prednášky nájdete na tejto stránke, vždy v deň, kedy sú v rozvrhu.

Budete dostávať domáce úlohy, ich odovzdanie je povinné v termíne do nasledovnej prednášky. Toleruje sa max jedna úloha odovzdaná po termíne. Riešenia mi posielajte ako jedno pdf-ko (ak nebude uvedené inak), kludne to môže byť aj rukou písané.

Cvičenia budú pre tých, ktorí mali problém s úlohou alebo si nie sú istí, či majú dobre vyriešenú úlohu. Spočiatku budu formou konzultácií (vždy napíšte, ak máte otázku!!) neskôr možno teamsov.

Prvé úlohy nebudem známkovať. Dopredu poviem, od ktorej budete dostávať známky. V prípade, že sa vám známka nepáči, môžete si ju opraviť. Zo známok potom dostanete výsledné hodnotenie.

## Organizácia kurzu

V prípade nápadnej podobnosti odovzdaných úloh, ďalšie budem hodnotiť známkou Fx.

## Organizácia kurzu

V prípade nápadnej podobnosti odovzdaných úloh, ďalšie budem hodnotiť známkou Fx.

Ak prejdeme na prezenčnú výuku, priebeh kurzu sa samozrejme zmení, úlohy ostanú, pribudnú testy.



## Organizácia kurzu

V prípade nápadnej podobnosti odovzdaných úloh, ďalšie budem hodnotiť známkou Fx.

Ak prejdeme na prezenčnú výuku, priebeh kurzu sa samozrejme zmení, úlohy ostanú, pribudnú testy.

**Samotné slidy nie sú určené na samoštúdium!!!**

## O čom bude reč:

Formálne metódy = na matematike založené techniky na špecifikáciu, vývoj a verifikáciu softvérových a hardvérových systémov.

## O čom bude reč:

Formálne metódy = na matematike založené techniky na špecifikáciu, vývoj a verifikáciu softvérových a hardvérových systémov.

Dôraz na modely a metódy pre systémy konkurentné a paralelné.

## O čom bude reč:

Formálne metódy = na matematike založené techniky na špecifikáciu, vývoj a verifikáciu softvérových a hardvérových systémov.

Dôraz na modely a metódy pre systémy konkurentné a paralelné.

Procesové algebry, Petriho siete, Časové automaty, logické formalizmy a model checking nástroje.

## Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

## Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

## Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of Communicating Systems, skrátene CCS, 1980

## Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of Communicating Systems, skrátene CCS, 1980

Milner R.: *Communication and concurrency*. Prentice-Hall International, New York, 1989.



## Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of Communicating Systems, skrátene CCS, 1980

Milner R.: *Communication and concurrency*. Prentice-Hall International, New York, 1989.

J.A. Bergstra a J.W. Klop

Algebra of Communicating Processes, skrátene ACP, 1985

## Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of Communicating Systems, skrátene CCS, 1980

Milner R.: *Communication and concurrency*. Prentice-Hall International, New York, 1989.

J.A. Bergstra a J.W. Klop

Algebra of Communicating Processes, skrátene ACP, 1985

Baeten J.A., W.P. Weijland: *Process Algebra*. Cambridge University Press, 1990.

## Procesové algebry

C.A.R.Hoare

**Communicating Sequential** Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of **Communicating** Systems, skrátene CCS, 1980

Milner R.: *Communication and concurrency*. Prentice-Hall International, New York, 1989.

J.A. Bergstra a J.W. Klop

Algebra of **Communicating** Processes, skrátene ACP, 1985

Baeten J.A., W.P. Weijland: *Process Algebra*. Cambridge University Press, 1990.

# Ďalšie procesové algebry a na nich založené jazyky

Ambient calculus, 1998, L. Cardelli and A. D. Gordon

# Ďalšie procesové algebry a na nich založené jazyky

Ambient calculus, 1998, L. Cardelli and A. D. Gordon

Pi-calculus, 1999, R. Milner, J. Parrow and D. Walker

# Ďalšie procesové algebry a na nich založené jazyky

Ambient calculus, 1998, L. Cardelli and A. D. Gordon

Pi-calculus, 1999, R. Milner, J. Parrow and D. Walker

... časové, pravdepodobnostné, stochastické PA, iné komunikačné mechanizmy, lokality, ...

# Ďalšie procesové algebry a na nich založené jazyky

Ambient calculus, 1998, L. Cardelli and A. D. Gordon

Pi-calculus, 1999, R. Milner, J. Parrow and D. Walker

... časové, pravdepodobnostné, stochastické PA, iné komunikačné mechanizmy, lokality, ...

Jazyky odvodené z procesových algebier alebo využívajúcich procesové algebry (či ich filozofiu) ako svoj základ:

- Wrightm (CSP,
- Timed Communicating Object Z (Object-Z a Timed CSP),
- Circus (CSP a Z),
- CspCASL(CSP),
- Ease (CSP),
- Occam (CSP),
- JCSP (CSP a Occam),
- C++CSP (CSP)

Petriho siete:



Petriho siete:

J.L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems.  
Prentice Hall, 1981.

W. Reisig, A Primer in Petri Net Design. Springer-Verlag, 1992.

Petriho siete:

J.L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems.  
Prentice Hall, 1981.

W. Reisig, A Primer in Petri Net Design. Springer-Verlag, 1992.

Časové automaty a UPPAAL

Petriho siete:

J.L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems.  
Prentice Hall, 1981.

W. Reisig, A Primer in Petri Net Design. Springer-Verlag, 1992.

Časové automaty a UPPAAL

Logika:

Petriho siete:

J.L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems.  
Prentice Hall, 1981.

W. Reisig, A Primer in Petri Net Design. Springer-Verlag, 1992.

Časové automaty a UPPAAL

Logika:

C. Stirling, Modal and Temporal Properties of Processes.  
Springer-Verlag, 2001.

# A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií  
(mien, komunikačných kanálov, ...)  $A$

# A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií  
(mien, komunikačných kanálov, ...)  $A$

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

# A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií  
(mien, komunikačných kanálov, ...)  $A$

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

# A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií  
(mien, komunikačných kanálov, ...)  $A$

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Jedna interpretácia:  $\bar{a}$  znamená poslanie správy cez kanál  $a$   
(výstupná akcia) a  $a$  znamená prijatie správy cez kanál  $a$  (vstupná akcia).



Daná množina atomických akcií  
(mien, komunikačných kanálov, ...)  $A$

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Jedna interpretácia:  $\bar{a}$  znamená poslanie správy cez kanál  $a$  (výstupná akcia) a  $a$  znamená prijatie správy cez kanál  $a$  (vstupná akcia).

Množina všetkých  $Act = A \cup \bar{A} \cup \{\tau\}$  kde  $\tau$  je špeciálna (interná) akcia nevyskytujúca sa v  $A$ .

# A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií  
(mien, komunikačných kanálov, ...)  $A$

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Jedna interpretácia:  $\bar{a}$  znamená poslanie správy cez kanál  $a$   
(výstupná akcia) a  $a$  znamená prijatie správy cez kanál  $a$  (vstupná akcia).

Množina všetkých  $Act = A \cup \bar{A} \cup \{\tau\}$  kde  $\tau$  je špeciálna (interná) akcia nevyskytujúca sa v  $A$ .

Prvky z  $A \cup \bar{A}$  budeme označovať  $a, b, c, \dots$

# A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií  
(mien, komunikačných kanálov, ...)  $A$

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Jedna interpretácia:  $\bar{a}$  znamená poslanie správy cez kanál  $a$  (výstupná akcia) a  $a$  znamená prijatie správy cez kanál  $a$  (vstupná akcia).

Množina všetkých  $Act = A \cup \bar{A} \cup \{\tau\}$  kde  $\tau$  je špeciálna (interná) akcia nevyskytujúca sa v  $A$ .

Prvky z  $A \cup \bar{A}$  budeme označovať  $a, b, c, \dots$

Prvky z  $Act$  budeme označovať  $x, y, z, \dots$

*Nil* - proces, ktorý nerobí nič

*Nil* - proces, ktorý nerobí nič

*a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

*Nil* - proces, ktorý nerobí nič

*a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

*b.a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

# CCS, neformálny úvod

*Nil* - proces, ktorý nerobí nič

*a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

*b.a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

$b.a.Nil \xrightarrow{b} a.Nil \xrightarrow{a} Nil$

# CCS, neformálny úvod

*Nil* - proces, ktorý nerobí nič

*a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

*b.a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

$b.a.Nil \xrightarrow{b} a.Nil \xrightarrow{a} Nil$

*a.Nil + b.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil* alebo akciu *b* a potom sa správa ako proces *Nil*



*Nil* - proces, ktorý nerobí nič

*a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

*b.a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

$b.a.Nil \xrightarrow{b} a.Nil \xrightarrow{a} Nil$

*a.Nil + b.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil* alebo akciu *b* a potom sa správa ako proces *Nil*

*c.(a.Nil + b.Nil)* - proces, ktorý vie urobiť akciu *c* a potom sa správa ako proces *(a.Nil + b.Nil)*

# CCS, neformálny úvod

*Nil* - proces, ktorý nerobí nič

*a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

*b.a.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

$b.a.Nil \xrightarrow{b} a.Nil \xrightarrow{a} Nil$

*a.Nil + b.Nil* - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil* alebo akciu *b* a potom sa správa ako proces *Nil*

*c.(a.Nil + b.Nil)* - proces, ktorý vie urobiť akciu *c* a potom sa správa ako proces *(a.Nil + b.Nil)*

$c.(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{c} a.Nil + b.Nil$

•  $a.Nil$        $a;$        $\int a$

$b.a.Nil$        $\frac{b;}{a;}$        $\left\{ \begin{array}{l} b \\ a \end{array} \right.$

•  $a.Nil + b.Nil$        $a \wedge b$

$c.(a.Nil + b.Nil)$        $\begin{array}{c} c \\ / \quad \backslash \\ a \quad b \end{array}$

# CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$  - proces, ktorý vie urobiť buď akciu  $a$  a potom sa správa ako proces  $Nil|b.Nil$  **alebo** akciu  $b$  a potom sa správa ako proces  $a.Nil|Nil$

# CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$  - proces, ktorý vie urobiť buď akciu  $a$  a potom sa správa ako proces  $Nil|b.Nil$  **alebo** akciu  $b$  a potom sa správa ako proces  $a.Nil|Nil$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{a} Nil|b.Nil \xrightarrow{b} Nil|Nil$$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{b} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

# CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$  - proces, ktorý vie urobiť buď akciu  $a$  a potom sa správa ako proces  $Nil|b.Nil$  **alebo** akciu  $b$  a potom sa správa ako proces  $a.Nil|Nil$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{a} Nil|b.Nil \xrightarrow{b} Nil|Nil$$
$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{b} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

$a.Nil|\bar{a}.Nil$  - proces, ktorý vie urobiť buď akciu  $a$  a potom sa správa ako proces  $Nil|\bar{a}.Nil$  **alebo** akciu  $\bar{a}$  a potom sa správa ako proces  $a.Nil|Nil$  **alebo** akciu  $\tau$  a potom sa správa ako  $Nil|Nil$

# CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$  - proces, ktorý vie urobiť buď akciu  $a$  a potom sa správa ako proces  $Nil|b.Nil$  **alebo** akciu  $b$  a potom sa správa ako proces  $a.Nil|Nil$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{a} Nil|b.Nil \xrightarrow{b} Nil|Nil$$
$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{b} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

$a.Nil|\bar{a}.Nil$  - proces, ktorý vie urobiť buď akciu  $a$  a potom sa správa ako proces  $Nil|\bar{a}.Nil$  **alebo** akciu  $\bar{a}$  a potom sa správa ako proces  $a.Nil|Nil$  **alebo** akciu  $\tau$  a potom sa správa ako  $Nil|Nil$

$\tau$  predstavuje v tomto prípade internú komunikáciu cez kanál  $a$

# CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$  - proces, ktorý vie urobiť buď akciu  $a$  a potom sa správa ako proces  $Nil|b.Nil$  **alebo** akciu  $b$  a potom sa správa ako proces  $a.Nil|Nil$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{a} Nil|b.Nil \xrightarrow{b} Nil|Nil$$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{b} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

$a.Nil|\bar{a}.Nil$  - proces, ktorý vie urobiť buď akciu  $a$  a potom sa správa ako proces  $Nil|\bar{a}.Nil$  **alebo** akciu  $\bar{a}$  a potom sa správa ako proces  $a.Nil|Nil$  **alebo** akciu  $\tau$  a potom sa správa ako  $Nil|Nil$

$\tau$  predstavuje v tomto prípade internú komunikáciu cez kanál  $a$

$$a.Nil|\bar{a}.Nil \xrightarrow{a} Nil|\bar{a}.Nil \xrightarrow{\bar{a}} Nil|Nil$$

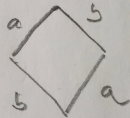
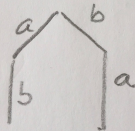
$$a.Nil|\bar{a}.Nil \xrightarrow{\bar{a}} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

$$a.Nil|\bar{a}.Nil \xrightarrow{\tau} Nil|Nil$$

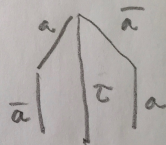


# CCS, neformálny úvod

$a.Nil \mid b.Nil$



$a.Nil \mid \bar{a}.Nil$



A. Úlohy:

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a)  $a.Nil$  a  $a.Nil + a.Nil$ ?

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a)  $a.Nil$  a  $a.Nil + a.Nil$ ?

b)  $a.b.Nil + a.c.Nil$  a  $a.(b.Nil + c.Nil)$ ?

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a)  $a.Nil$  a  $a.Nil + a.Nil$ ?

b)  $a.b.Nil + a.c.Nil$  a  $a.(b.Nil + c.Nil)$ ?

c)  $a.Nil|b.Nil$  a  $a.b.Nil + b.a.Nil$ ?

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a)  $a.Nil$  a  $a.Nil + a.Nil$ ?

b)  $a.b.Nil + a.c.Nil$  a  $a.(b.Nil + c.Nil)$ ?

c)  $a.Nil|b.Nil$  a  $a.b.Nil + b.a.Nil$ ?

d)  $a.Nil|a.Nil$  a  $a.Nil$ ?

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a)  $a.Nil$  a  $a.Nil + a.Nil$ ?

b)  $a.b.Nil + a.c.Nil$  a  $a.(b.Nil + c.Nil)$ ?

c)  $a.Nil|b.Nil$  a  $a.b.Nil + b.a.Nil$ ?

d)  $a.Nil|a.Nil$  a  $a.Nil$ ?

e)  $a.Nil|a.Nil$  a  $a.a.Nil + a.a.Nil$ ?



2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

a) raz tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

a) raz tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

b) tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

a) raz tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

b) tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

c) raz alebo tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia.

2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

a) raz tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

b) tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

c) raz alebo tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia.

3. Napíšte proces pozostávajúci z dvoch paralelne bežiacich procesov, kde jeden vie prijať niečo z kanálu *in* a pošle to do kanálu *send*. Druhý vie prijať niečo z kanálu *send* a poslať to na kanál *out*.

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{a} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{b} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{a} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{b} Nil$$

$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\}$  vie urobiť len akciu b - akcia a je zakázaná

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{a} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{b} Nil$$

$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\}$  vie urobiť len akciu b - akcia a je zakázaná

$$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\} \xrightarrow{b} Nil$$



$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{a} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{b} Nil$$

$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\}$  vie urobiť len akciu b - akcia a je zakázaná

$$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\} \xrightarrow{b} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\} \not\xrightarrow{a}$$

Použitie:

nech  $P = a.Nil$ ,  $Q = \bar{a}.Nil$  - v procese  $P|Q$  môže P komunikovať s Q cez kanál a ale nemusí - cez tento kanál môže procesu P poslať správu aj niekto iný.

Použitie:

nech  $P = a.Nil$ ,  $Q = \bar{a}.Nil$  - v procese  $P|Q$  môže P komunikovať s Q cez kanál a ale nemusí - cez tento kanál môže procesu P poslať správu aj niekto iný.

$$(P|Q) \setminus \{a\} \xrightarrow{\tau} Nil|Nil$$

Použitie:

nech  $P = a.Nil$ ,  $Q = \bar{a}.Nil$  - v procese  $P|Q$  môže P komunikovať s Q cez kanál a ale nemusí - cez tento kanál môže procesu P poslať správu aj niekto iný.

$$(P|Q) \setminus \{a\} \xrightarrow{\tau} Nil|Nil$$

$$(P|Q) \setminus \{a\} \not\xrightarrow{a}$$

Zatiaľ máme len konečné procesy.

Zatiaľ máme len konečné procesy.

*Clock = tick.Clock*

Zatiaľ máme len konečné procesy.

$Clock = tick.Clock$

Nekonečný proces ako riešenie rovnice  $X = tick.X$

Zatiaľ máme len konečné procesy.

$Clock = tick.Clock$

Nekonečný proces ako riešenie rovnice  $X = tick.X$

Budeme ho značiť ako  $\mu X tick.X$



Zatiaľ máme len konečné procesy.

$Clock = tick.Clock$

Nekonečný proces ako riešenie rovnice  $X = tick.X$

Budeme ho značiť ako  $\mu X tick.X$

B. Úloha:

a) napíšte proces reprezentujúci hodiny, ktoré idú bezchybne alebo raz tiknú naposledy.

Zatiaľ máme len konečné procesy.

$Clock = tick.Clock$

Nekonečný proces ako riešenie rovnice  $X = tick.X$

Budeme ho značiť ako  $\mu X tick.X$

B. Úloha:

a) napíšte proces reprezentujúci hodiny, ktoré idú bezchybne alebo raz tiknú naposledy.

b) napíšte systém pozostávajúci z procesu  $K$  a hodín, ktoré môžu ísť bezchybne alebo im proces  $K$  pošle signál na zastavenie. Pričom nikto iný im takýto signál nemôže poslať.

Dané *Act* a procesové premenné  $X, Y, Z, \dots$

Dané *Act* a procesové premenné  $X, Y, Z, \dots$

Množina CCS termov:

$P ::=$	$Nil$	prázdny proces
	$X$	procesová premenná
	$x.P$	$x \in Act$ operácia prefixu
	$P + Q$	nedeterministický výber $P$ alebo $Q$
	$P   Q$	paralelná kompozícia
	$P \setminus L$	reštrikcia $L \subseteq A$
	$P[f]$	premenovanie funkciou $f : A \rightarrow A$
	$\mu X P$	rekurzia $X$ je procesová premenná

Dané *Act* a procesové premenné  $X, Y, Z, \dots$

Množina CCS termov:

$P ::=$	$Nil$	prázdny proces
	$X$	procesová premenná
	$x.P$	$x \in Act$ operácia prefixu
	$P + Q$	nedeterministický výber $P$ alebo $Q$
	$P   Q$	paralelná kompozícia
	$P \setminus L$	reštrikcia $L \subseteq A$
	$P[f]$	premenovanie funkciou $f : A \rightarrow A$
	$\mu X P$	rekurzia $X$ je procesová premenná

Premonovávacia funkcia:  $f : Act \rightarrow Act$  taká, že  
 $f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$ ,  $f(\tau) = \tau$ .

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P | b.Q \setminus L$  znamená  $R + ((a.P)) | (b.(Q \setminus L))$

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P | b.Q \setminus L$  znamená  $R + ((a.P)) | (b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).



Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P | b.Q \setminus L$  znamená  $R + ((a.P)) | (b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je  $\mu X$ .

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P | b.Q \setminus L$  znamená  $R + ((a.P)) | (b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je  $\mu X$ .

Príklad:

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P|b.Q \setminus L$  znamená  $R + ((a.P))|(b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je  $\mu X$ .

Príklad:

$a.X, b.X|b.Nil$  - otvorené termy

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P|b.Q \setminus L$  znamená  $R + ((a.P))|(b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je  $\mu X$ .

Príklad:

$a.X, b.X|b.Nil$  - otvorené termy

$\mu X a.X, \mu X (b.X|b.Nil)$  uzavrené termy - t.j. procesy

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P|b.Q \setminus L$  znamená  $R + ((a.P))|(b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je  $\mu X$ .

Príklad:

$a.X, b.X|b.Nil$  - otvorené termy

$\mu X a.X, \mu X (b.X|b.Nil)$  uzavrené termy - t.j. procesy

$\mu Y a.X$  - otvorený term

Značkový prechodový systém je trojica  $(S, \rightarrow, \Lambda)$  kde  $S$  je množina stavov,  $\Lambda$  je množina značiek a  $\rightarrow \subseteq S \times \Lambda \times S$ .

# Značkové prechodové systémy

Značkový prechodový systém je trojica  $(S, \rightarrow, \Lambda)$  kde  $S$  je množina stavov,  $\Lambda$  je množina značiek a  $\rightarrow \subseteq S \times \Lambda \times S$ .

Ak  $p, q \in S$  a  $\alpha \in \Lambda$  tak miesto  $(p, \alpha, q) \in \rightarrow$  budeme písať  $p \xrightarrow{\alpha} q$ .

# Značkové prechodové systémy

Značkový prechodový systém je trojica  $(S, \rightarrow, \Lambda)$  kde  $S$  je množina stavov,  $\Lambda$  je množina značiek a  $\rightarrow \subseteq S \times \Lambda \times S$ .

Ak  $p, q \in S$  a  $\alpha \in \Lambda$  tak miesto  $(p, \alpha, q) \in \rightarrow$  budeme písať  $p \xrightarrow{\alpha} q$ .

Príklady množiny značiek: inštrukcie programu, vstupy alebo výstupy, množina odpálených prechodov pri Petriho sietiach, splnené podmienky, plynutie času atď.



Značkový prechodový systém je trojica  $(S, \rightarrow, \Lambda)$  kde  $S$  je množina stavov,  $\Lambda$  je množina značiek a  $\rightarrow \subseteq S \times \Lambda \times S$ .

Ak  $p, q \in S$  a  $\alpha \in \Lambda$  tak miesto  $(p, \alpha, q) \in \rightarrow$  budeme písať  $p \xrightarrow{\alpha} q$ .

Príklady množiny značiek: inštrukcie programu, vstupy alebo výstupy, množina odpálených prechodov pri Petriho sietiach, splnené podmienky, plynutie času atď.

Vlastnosti: nástroj pre definovanie operačnej sémantiky iných modelov, veľmi jednoduchý, neobsahuje žiadne konštruktory, priama súvislosť s Kripkeho štruktúrou

Značkový prechodový systém

Značkový prechodový systém

Množina stavov - množina procesov CCS

Značkový prechodový systém

Množina stavov - množina procesov CCS

Množina značiek - *Act*

Značkový prechodový systém

Množina stavov - množina procesov  $CCS$

Množina značiek -  $Act$

Ostáva definovať množinu  $\rightarrow \subseteq CCS \times Act \times CCS$

$$\frac{}{x.P \xrightarrow{x} P}$$

$$\frac{P \xrightarrow{x} P'}{P + Q \xrightarrow{x} P', Q + P \xrightarrow{x} P'}$$

$$\frac{P \xrightarrow{u} P'}{P | Q \xrightarrow{u} P' | Q, Q | P \xrightarrow{u} Q | P'}$$

$$\frac{P \xrightarrow{a} P', Q \xrightarrow{\bar{a}} Q'}{P | Q \xrightarrow{\tau} P' | Q'}$$

$$\frac{P \xrightarrow{x} P'}{P \setminus L \xrightarrow{x} P' \setminus L}, (x, \bar{x} \notin L)$$

$$\frac{P \xrightarrow{x} P'}{P[f] \xrightarrow{f(x)} P'[f]}$$

$$\frac{P[\mu XP/X] \xrightarrow{x} P'}{\mu XP \xrightarrow{x} P'}$$

$$\begin{aligned} a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) &\xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ &\xrightarrow{b} c.Nil \xrightarrow{c} Nil \end{aligned}$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{b} c.Nil \xrightarrow{c} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{d} Nil$$



$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{b} c.Nil \xrightarrow{c} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{d} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{c} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{b} c.Nil \xrightarrow{c} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{d} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{c} Nil$$

$$\mu X a.X \xrightarrow{a} \mu X a.X \xrightarrow{a} \mu X a.X \xrightarrow{a} \dots$$

Strom odvodenia pre proces  $P$  - značený orientovaný graf s vrcholom  $P$

Strom odvodenia pre proces  $P$  - značený orientovaný graf s vrcholom  $P$

hrana označená  $x$  vedie z  $R$  do  $Q$  ak  $R \xrightarrow{x} Q$ .

Strom odvodenia pre proces  $P$  - značený orientovaný graf s vrcholom  $P$

hrana označená  $x$  vedie z  $R$  do  $Q$  ak  $R \xrightarrow{x} Q$ .

Úloha

Napíšte stromy odvodenia pre procesy:

1.  $(a.(b.Nil + c.Nil))$
2.  $(a.(b.Nil|c.Nil))$
3.  $(a.(b.Nil + c.Nil) \setminus \{b\})$
4.  $(a.(b.Nil|\bar{b}.Nil))$
5.  $(a.(b.Nil|\bar{b}.Nil) \setminus \{b\})$
6.  $\mu X(a.X + b.X + c.Nil)$
7.  $\mu X(X|a.Nil)$

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:  
vie prijať mincu (akcia coin)

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:  
vie prijať mincu (akcia coin)  
dá sa na ňom stlačiť tlačitko tea alebo coffee



1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:  
vie prijať mincu (akcia coin)  
dá sa na ňom stlačiť tlačítko tea alebo coffee  
vydá tea alebo coffee

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:  
vie prijať mincu (akcia coin)  
dá sa na ňom stlačiť tlačítka tea alebo coffee  
vydá tea alebo coffee  
Napíšte používateľa, ktorý si vyberá medzi tea a coffee a takého,  
čo pije len kávu.

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:  
vie prijať mincu (akcia coin)  
dá sa na ňom stlačiť tlačítka tea alebo coffee  
vydá tea alebo coffee  
Napíšte používateľa, ktorý si vyberá medzi tea a coffee a takého,  
čo pije len kávu.

2. Napíšte strom odvodu priedecie.

2. Napíšte strom odvodu priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály

2. Napíšte strom odvoduenia priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály  
akcie:

*auto, vlak* - blíži sa auto, vlak

2. Napíšte strom odvodu priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály  
akcie:

*auto, vlak* - blíži sa auto, vlak

*hore, dolu* - pohyb rámp

2. Napíšte strom odvodu priecestie.

pozostáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály  
akcie:

*auto, vlak* - blíži sa auto, vlak

*hore, dolu* - pohyb rámp

*akrizuje, vkrizuje* - auto, vlak križuje priecestie



2. Napíšte strom odvedenia priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály  
akcie:

*auto, vlak* - blíži sa auto, vlak

*hore, dolu* - pohyb rámp

*akrizuje, vkrizuje* - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

2. Napíšte strom odvodu priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály  
akcie:

*auto, vlak* - blíži sa auto, vlak

*hore, dolu* - pohyb rámp

*akrizuje, vkrizuje* - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

$Cesta = auto.\overline{hore}.\overline{akrizuje}.\overline{dole}.Cesta$

2. Napíšte strom odvodu priecestie.

pozostáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály  
akcie:

*auto, vlak* - blíži sa auto, vlak

*hore, dolu* - pohyb rámp

*akrizuje, vkrizuje* - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

*Cesta = auto.hore.akrizuje.dole.Cesta*

*Zeleznica = vlak.zelena.vkrizuje.cervena.Zeleznica*

2. Napíšte strom odvedenia priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály  
akcie:

*auto, vlak* - blíži sa auto, vlak

*hore, dolu* - pohyb rámp

*akrizuje, vkrizuje* - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

*Cesta = auto.hore.akrizuje.dole.Cesta*

*Zeleznica = vlak.zelena.vkrizuje.cervena.Zeleznica*

*Signaly = zelna.cervena.Signaly + hore.dole.Signaly*

2. Napíšte strom odvedenia priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály  
akcie:

*auto, vlak* - blíži sa auto, vlak

*hore, dolu* - pohyb rámp

*akrizuje, vkrizuje* - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

$Cesta = auto.\overline{hore}.\overline{akrizuje}.\overline{dole}.Cesta$

$Zeleznica = vlak.\overline{zelena}.\overline{vkrizuje}.\overline{cervena}.Zeleznica$

$Signaly = zelna.\overline{cervena}.Signaly + hore.\overline{dole}.Signaly$

$Priecestie \equiv$

$(Cesta|Zeleznica|Signaly) \setminus \{zelena, cervena, hore, dole\}$

*a.Nil + a.Nil vs. a.Nil*

$a.Nil + a.Nil$  vs.  $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$  vs.  $Nil$

# Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$  vs.  $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$  vs.  $Nil$

$a.(b.Nil + c.Nil)$  vs.  $a.b.Nil + a.c.Nil$



# Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$  vs.  $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$  vs.  $Nil$

$a.(b.Nil + c.Nil)$  vs.  $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$  vs.  $a.Nil|b.Nil$

# Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$  vs.  $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$  vs.  $Nil$

$a.(b.Nil + c.Nil)$  vs.  $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$  vs.  $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

$a.Nil + a.Nil$  vs.  $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$  vs.  $Nil$

$a.(b.Nil + c.Nil)$  vs.  $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$  vs.  $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

- pozorovateľ nevidí syntax (to jest popis procesu)

# Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$  vs.  $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$  vs.  $Nil$

$a.(b.Nil + c.Nil)$  vs.  $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$  vs.  $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

- pozorovateľ nevidí syntax (to je popis procesu)
- black box scénár

$a.Nil + a.Nil$  vs.  $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$  vs.  $Nil$

$a.(b.Nil + c.Nil)$  vs.  $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$  vs.  $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

- pozorovateľ nevidí syntax (to jest popis procesu)
- black box scénár
- ak nevie rozlíšiť medzi dvoma procesmi, tak ich považuje za ekvivalentné

$a.Nil + a.Nil$  vs.  $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$  vs.  $Nil$

$a.(b.Nil + c.Nil)$  vs.  $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$  vs.  $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

- pozorovateľ nevidí syntax (to je popis procesu)
- black box scénár
- ak nevie rozlíšiť medzi dvoma procesmi, tak ich považuje za ekvivalentné
- rôzne možnosti pozorovateľa vedú k rôznym ekvivalenciám medzi procesmi

Dva procesy sa správajú **rovnako**, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú **rovnako**.

Dva procesy sa správajú **rovnako**, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú **rovnako**.

## Definition

Binárna relácia  $S \subseteq CCS \times CCS$  je (silná) bisimulácia, ak  $(P, Q) \in S$  implikuje

- 1) ak  $P \xrightarrow{x} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{x} Q'$  a platí  $(P', Q') \in S$
- 2) ak  $Q \xrightarrow{x} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{x} P'$  a platí  $(P', Q') \in S$



Dva procesy sa správajú **rovnako**, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú **rovnako**.

## Definition

Binárna relácia  $S \subseteq CCS \times CCS$  je (silná) bisimulácia, ak  $(P, Q) \in S$  implikuje

- 1) ak  $P \xrightarrow{x} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{x} Q'$  a platí  $(P', Q') \in S$
- 2) ak  $Q \xrightarrow{x} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{x} P'$  a platí  $(P', Q') \in S$

Poznámka - aj prázdna relácia je bisimulácia.

Dva procesy sa správajú **rovnako**, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú **rovnako**.

## Definition

Binárna relácia  $S \subseteq CCS \times CCS$  je (silná) bisimulácia, ak  $(P, Q) \in S$  implikuje

- 1) ak  $P \xrightarrow{x} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{x} Q'$  a platí  $(P', Q') \in S$
- 2) ak  $Q \xrightarrow{x} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{x} P'$  a platí  $(P', Q') \in S$

Poznámka - aj prázdna relácia je bisimulácia.

Úloha: napíšte, ak existuje, bisimuláciu obsahujúcu dvojice

$a.Nil + a.Nil$  a  $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$  a  $Nil$

$a.(b.Nil + c.Nil)$  a  $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$  a  $a.Nil|b.Nil$

Označenie:

Označenie:

$$S^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in S\}$$

$$S_1 S_2 = \{(x, z) \mid \exists y, (x, y) \in S_1, (y, z) \in S_2\}$$

$$I_d - \text{identická relácia t.j. } I_d = \{(x, x) \mid \forall x\}$$

Označenie:

$$S^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in S\}$$

$$S_1 S_2 = \{(x, z) | \exists y, (x, y) \in S_1, (y, z) \in S_2\}$$

$$I_d - \text{identická relácia t.j. } I_d = \{(x, x) | \forall x\}$$

## Theorem

*Nech  $S_1, S_2$  sú silné bisimulácie. Potom aj nasledovné relácie sú silné bisimulácie*

- 1)  $I_d$
- 2)  $S^{-1}$
- 3)  $S_1 S_2$
- 4)  $S_1 \cup S_2$

Označenie:

$$S^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in S\}$$

$$S_1 S_2 = \{(x, z) | \exists y, (x, y) \in S_1, (y, z) \in S_2\}$$

$$I_d - \text{identická relácia t.j. } I_d = \{(x, x) | \forall x\}$$

## Theorem

*Nech  $S_1, S_2$  sú silné bisimulácie. Potom aj nasledovné relácie sú silné bisimulácie*

- 1)  $I_d$
- 2)  $S^{-1}$
- 3)  $S_1 S_2$
- 4)  $S_1 \cup S_2$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Definition

Procesy  $P$  a  $Q$  sú silne bisimulárne ( $P \sim Q$ ) ak  $(P, Q) \in S$  pre nejakú silnú bisimuláciu  $S$ .

Ekvivalentná formulácia:

$$\sim = \bigcup \{ S \mid S \text{ je silná bisimulácia} \}$$

## Definition

Procesy  $P$  a  $Q$  sú silne bisimulárne ( $P \sim Q$ ) ak  $(P, Q) \in S$  pre nejakú silnú bisimuláciu  $S$ .

Ekvivalentná formulácia:

$$\sim = \bigcup \{ S \mid S \text{ je silná bisimulácia} \}$$

## Theorem

$\sim$  je najväčšia silná bisimulácia

$\sim$  je ekvivalencia



## Definition

Procesy  $P$  a  $Q$  sú silne bisimulárne ( $P \sim Q$ ) ak  $(P, Q) \in S$  pre nejakú silnú bisimuláciu  $S$ .

Ekvivalentná formulácia:

$$\sim = \bigcup \{ S \mid S \text{ je silná bisimulácia} \}$$

## Theorem

$\sim$  je najväčšia silná bisimulácia

$\sim$  je ekvivalencia

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Theorem

$P \sim Q$  iff  $\forall x \in Act$

- 1) ak  $P \xrightarrow{x} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{x} Q'$  a platí  $P' \sim Q'$
- 2) ak  $Q \xrightarrow{x} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{x} P'$  a platí  $P' \sim Q'$

## Theorem

$P \sim Q$  iff  $\forall x \in Act$

- 1) ak  $P \xrightarrow{x} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{x} Q'$  a platí  $P' \sim Q'$
- 2) ak  $Q \xrightarrow{x} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{x} P'$  a platí  $P' \sim Q'$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Theorem

$P \sim Q$  iff  $\forall x \in Act$

- 1) ak  $P \xrightarrow{x} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{x} Q'$  a platí  $P' \sim Q'$
- 2) ak  $Q \xrightarrow{x} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{x} P'$  a platí  $P' \sim Q'$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Definition

Binárna relácia  $S \subseteq CCS \times CCS$  je silná bisimulácia až na  $\sim$ , ak  $(P, Q) \in S$  implikuje

- 1) ak  $P \xrightarrow{x} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{x} Q'$  a platí  $(P', Q') \in \sim S \sim$
- 2) ak  $Q \xrightarrow{x} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{x} P'$  a platí  $(P', Q') \in \sim S \sim$