Modely konkurentných systémov
Formálne metódy tvorby softvéru

Damas Gruska

Katedra aplikovanej informatiky, I20, gruska@fmph.uniba.sk

Prednáška 3.

Bisimulácia

Dva procesy sa správajú rovnako, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú rovnako.

Bisimulácia

Dva procesy sa správajú rovnako, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú rovnako.

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je (silná) bisimulácia, ak
$(P, Q) \in S$ implikuje
1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Bisimulácia

Dva procesy sa správajú rovnako, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú rovnako.

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je (silná) bisimulácia, ak
$(P, Q) \in S$ implikuje
1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Definition

Procesy P a Q sú silne bisimulárne $(P \sim Q)$ ak $(P, Q) \in S$ pre nejakú silnú bisimuláciu S.
Ekvivalentná formulácia:
$\sim = \bigcup\{S | S \text{ je silná bisimulácia }\}$

Bisimulácia

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je silná bisimulácia až na $\sim$, ak $(P, Q) \in S$ implikuje
1) ak $P \stackrel{x}{\rightarrow} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \stackrel{x}{\rightarrow} Q'$ a platí $(P', Q') \in \sim S \sim$
2) ak $Q \stackrel{x}{\rightarrow} Q'$ tak existuje P' také, že $P \stackrel{x}{\rightarrow} P'$ a platí $(P', Q') \in \sim S \sim$

Bisimulácia

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je silná bisimulácia až na $\sim$, ak $(P, Q) \in S$ implikuje
1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in \sim S \sim$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in \sim S \sim$

Theorem

Ak S je silná bisimulácia až na $\sim$, potom $\sim S \sim$ je silná bisimulácia.

Bisimulácia

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je silná bisimulácia až na $\sim$, ak $(P, Q) \in S$ implikuje
1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in \sim S \sim$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in \sim S \sim$

Theorem

Ak S je silná bisimulácia až na $\sim$, potom $\sim S \sim$ je silná bisimulácia.

Theorem

Ak S je silná bisimulácia až na $\sim$ tak , potom $S \subseteq \sim$.

Theorem

Nech pre procesy P_1, P_2 a termy E_1, E_2 s jednou voľnou premennou X platí $P_1 \sim P_2$ a $E_1 \sim E_2$. Potom

$$\begin{array}{rcl} x.P_1 & \sim & x.P_2 \\ P_1 + Q & \sim & P_2 + Q \\ P_1|Q & \sim & P_2|Q \\ P_1 \setminus L & \sim & P_2 \setminus L \\ P_1[f] & \sim & P_2[f] \\ \mu X E_1 & \sim & \mu X E_2 \end{array}$$

Bisimulácia ako kongruencia

Theorem

Nech pre procesy P_1, P_2, R_1, R_1 *platí* $P_1 \sim P_2$ *a* $R_1 \sim R_2$. *Potom*

$$\begin{aligned} P_1 + R_1 &\sim P_2 + R_2 \\ P_1 | R_1 &\sim P_2 | R_2 \end{aligned}$$

Bisimulácia ako kongruencia

Theorem

Nech pre procesy P_1, P_2, R_1, R_1 platí $P_1 \sim P_2$ a $R_1 \sim R_2$. Potom

$$\begin{aligned} P_1 + R_1 &\sim P_2 + R_2 \\ P_1 | R_1 &\sim P_2 | R_2 \end{aligned}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Bisimulácia ako kongruencia

Proces Sender

$Sender \equiv in.\overline{send}.Nil$

Proces Sender

$Sender \equiv in.\overline{send}.Nil$

Bisimulácia ako kongruencia

Proces Sender
$Sender \equiv in.\overline{send}.Nil$

Nech
$P_1 | \ldots | P_k \sim Sender$

Bisimulácia ako kongruencia

Proces Sender
$Sender \equiv in.\overline{send}.Nil$

Nech
$P_1 | \dots | P_k \sim Sender$

Proces Receiver
$Receiver \equiv send.\overline{out}.Nil$

Bisimulácia ako kongruencia

Proces Sender
$Sender \equiv in.\overline{send}.Nil$

Nech
$P_1|\ldots|P_k \sim Sender$

Proces Receiver
$Receiver \equiv send.\overline{out}.Nil$

Nech
$R_1|\ldots|R_l \sim Receiver$

Bisimulácia ako kongruencia

Proces Sender
$Sender \equiv in.\overline{send}.Nil$

Nech
$P_1|\dots|P_k \sim Sender$

Proces Receiver
$Receiver \equiv send.\overline{out}.Nil$

Nech
$R_1|\dots|R_l \sim Receiver$

Potom máme
$(P_1|\dots|P_k|R_1|\dots|R_l) \setminus \{send\} \sim (Sender|Receiver) \setminus \{send\}$

Silná bisimulácia ako pevný bod

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Definujme $f : CCS \times CCS \to CCS \times CCS$: ak
$R \subseteq CCS \times CCS$ tak $(P, Q) \in f(R)$ iff (if and only if) pre každé $x \in Act$ platí
1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in R$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in R$

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Definujme $f : CCS \times CCS \rightarrow CCS \times CCS$: ak
$R \subseteq CCS \times CCS$ tak $(P, Q) \in f(R)$ iff (if and only if) pre každé $x \in Act$ platí
1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in R$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in R$

Theorem

1. f je monotónna,
2. S je silná bisimulácia iff $S \subseteq f(S)$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Reláciu R budeme volať pevný bod f ak $R = f(R)$.

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Reláciu R budeme volať pevný bod f ak $R = f(R)$.

Theorem

1. $\sim$ *je pevný bod* f*, t.j.* $\sim = f(\sim)$*,*
2. $\sim$ *je najväčší pevný bod* f*.*

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Reláciu R budeme volať pevný bod f ak $R = f(R)$.

Theorem

1. $\sim$ je pevný bod f, t.j. $\sim = f(\sim)$,

2. $\sim$ je najväčší pevný bod f.

Dôkaz.

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Reláciu R budeme volať pevný bod f ak $R = f(R)$.

Theorem

1. $\sim$ je pevný bod f, t.j. $\sim = f(\sim)$,
2. $\sim$ je najväčší pevný bod f.

Dôkaz.
Keďže $\sim$ je silná bisumulácia, podľa predchádzajúcej vety máme $\sim \subseteq f(\sim)$.

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Reláciu R budeme volať pevný bod f ak $R = f(R)$.

Theorem

1. $\sim$ je pevný bod f, t.j. $\sim = f(\sim)$,
2. $\sim$ je najväčší pevný bod f.

Dôkaz.
Keďže $\sim$ je silná bisumulácia, podľa predchádzajúcej vety máme $\sim \subseteq f(\sim)$.
f je monotónna a tak $f(\sim) \subseteq f(f(\sim))$ t.j. $f(\sim)$ je silná bisimulácia podľa predchádzajúcej vety.

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Reláciu R budeme volať pevný bod f ak $R = f(R)$.

Theorem

1. $\sim$ je pevný bod f, t.j. $\sim = f(\sim)$,
2. $\sim$ je najväčší pevný bod f.

Dôkaz.
Keďže $\sim$ je silná bisumulácia, podľa predchádzajúcej vety máme $\sim \subseteq f(\sim)$.
f je monotónna a tak $f(\sim) \subseteq f(f(\sim))$ t.j. $f(\sim)$ je silná bisimulácia podľa predchádzajúcej vety.
Z toho plynie $f(\sim) \subseteq \sim$ a teda $\sim = f(\sim)$.

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Reláciu R budeme volať pevný bod f ak $R = f(R)$.

Theorem

1. $\sim$ je pevný bod f, t.j. $\sim = f(\sim)$,
2. $\sim$ je najväčší pevný bod f.

Dôkaz.
Keďže $\sim$ je silná bisumulácia, podľa predchádzajúcej vety máme $\sim \subseteq f(\sim)$.
f je monotónna a tak $f(\sim) \subseteq f(f(\sim))$ t.j. $f(\sim)$ je silná bisimulácia podľa predchádzajúcej vety.
Z toho plynie $f(\sim) \subseteq \sim$ a teda $\sim = f(\sim)$.
$\sim$ je najväčší pre-pevný bod a pevný bod a teda je najväčší pevný bod.

Alternating Bit Protocol

$Sender \ldots in_m, sm_{m,i}, ms_i, m \in M, i \in \{0,1\}$

Alternating Bit Protocol

$Sender \ldots in_m, sm_{m,i}, ms_i, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Receiver \ldots mr_{m,i}, rm_i, \overline{out}_m, m \in M, i \in \{0,1\}$

Alternating Bit Protocol

$Sender \ldots in_m, sm_{m,i}, ms_i, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Receiver \ldots mr_{m,i}, rm_i, \overline{out}_m, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Medium_1 \ldots sm_{m,i}, mr_{m,i}, m \in M, i \in \{0,1\}$

Alternating Bit Protocol

$Sender \ldots in_m, sm_{m,i}, ms_i, m \in M, i \in \{0, 1\}$
$Receiver \ldots mr_{m,i}, rm_i, \overline{out}_m, m \in M, i \in \{0, 1\}$
$Medium_1 \ldots sm_{m,i}, mr_{m,i}, m \in M, i \in \{0, 1\}$
$Medium_2 \ldots rm_i, ms_i, i \in \{0, 1\}$

Alternating Bit Protocol

$Sender \ldots in_m, sm_{m,i}, ms_i, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Receiver \ldots mr_{m,i}, rm_i, \overline{out}_m, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Medium_1 \ldots sm_{m,i}, mr_{m,i}, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Medium_2 \ldots rm_i, ms_i, i \in \{0,1\}$

$Protokol \equiv (Sender | Medium_1 | Medium_2 | Receiver) \setminus$
$\{sm_{m,i}, mr_{m,i}, rm_i, ms_i, m \in M, i \in \{0,1\}\}$

Alternating Bit Protocol

$Sender \ldots in_m, sm_{m,i}, ms_i, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Receiver \ldots mr_{m,i}, rm_i, \overline{out}_m, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Medium_1 \ldots sm_{m,i}, mr_{m,i}, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Medium_2 \ldots rm_i, ms_i, i \in \{0,1\}$

$Protokol \equiv (Sender|Medium_1|Medium_2|Receiver) \setminus$
$\{sm_{m,i}, mr_{m,i}, rm_i, ms_i, m \in M, i \in \{0,1\}\}$

$ProtokolSpecifikacia \equiv \mu X \sum_{m \in M} in_m.\overline{out}_m.X$

Alternating Bit Protocol

$Sender ... in_m, sm_{m,i}, ms_i, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Receiver ... mr_{m,i}, rm_i, \overline{out}_m, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Medium_1 ... sm_{m,i}, mr_{m,i}, m \in M, i \in \{0,1\}$
$Medium_2 ... rm_i, ms_i, i \in \{0,1\}$

$Protokol \equiv (Sender|Medium_1|Medium_2|Receiver) \setminus$
$\{sm_{m,i}, mr_{m,i}, rm_i, ms_i, m \in M, i \in \{0,1\}\}$

$ProtokolSpecifikacia \equiv \mu X \sum_{m \in M} in_m.\overline{out}_m.X$

Správajú sa *Protokol* a *ProtokolSpecifikacia* rovnako?

Slabá bisimulácia

Definition

Ak $s \in Act^*$ tak $\hat{s}$ je postupnosť akcií, ktorá vznikne z tým, že vypustíme všetky τ akcie.

Slabá bisimulácia

Definition

Ak $s \in Act^*$ tak $\hat{s}$ je postupnosť akcií, ktorá vznikne z tým, že vypustíme všetky τ akcie.

$s = ab\tau c\tau a, \hat{s} = abca$

Slabá bisimulácia

Definition

Ak $s \in Act^*$ tak $\hat{s}$ je postupnosť akcií, ktorá vznikne z tým, že vypustíme všetky τ akcie.

$s = ab\tau c\tau a, \hat{s} = abca$
$\hat{\tau}^n = \epsilon$

Slabá bisimulácia

Definition

Ak $s \in Act^*$ tak $\hat{s}$ je postupnosť akcií, ktorá vznikne z tým, že vypustíme všetky τ akcie.

$s = ab\tau c\tau a, \hat{s} = abca$
$\hat{\tau}^n = \epsilon$

Definition

Ak $s = x_1 x_2 \ldots x_n, x_i \in Act$ tak budeme písať $P \xrightarrow{s} P'$ ak
$P \xrightarrow{x_1}\xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_n} P'$

Slabá bisimulácia

Definition

Ak $s \in Act^*$ tak $\hat{s}$ je postupnosť akcií, ktorá vznikne z tým, že vypustíme všetky τ akcie.

$s = ab\tau c\tau a, \hat{s} = abca$
$\hat{\tau}^n = \epsilon$

Definition

Ak $s = x_1 x_2 \dots x_n, x_i \in Act$ tak budeme písať $P \xrightarrow{s} P'$ ak $P \xrightarrow{x_1}\xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_n} P'$

Definition

Definujme nový značkovaný prechdový systém (s inou množninou prechodv). Ak $s = x_1 x_2 \dots x_n, x_i \in Act$ tak $P \stackrel{s}{\Rightarrow} P'$ ak $P(\xrightarrow{\tau})^* \xrightarrow{x_1} (\xrightarrow{\tau})^* \xrightarrow{x_2} (\xrightarrow{\tau})^* \dots (\xrightarrow{\tau})^* \xrightarrow{x_n} (\xrightarrow{\tau})^* P'$.

Slabá bisimulácia

Definition

Ak $s \in Act^*$ tak $\hat{s}$ je postupnosť akcií, ktorá vznikne z tým, že vypustíme všetky τ akcie.

$s = ab\tau c\tau a, \hat{s} = abca$
$\hat{\tau}^n = \epsilon$

Definition

Ak $s = x_1x_2 \ldots x_n, x_i \in Act$ tak budeme písať $P \xrightarrow{s} P'$ ak $P \xrightarrow{x_1}\xrightarrow{x_2} \cdots \xrightarrow{x_n} P'$

Definition

Definujme nový značkovaný prechdový systém (s inou množninou prechodv). Ak $s = x_1x_2 \ldots x_n, x_i \in Act$ tak $P \stackrel{s}{\Rightarrow} P'$ ak $P(\xrightarrow{\tau})^* \xrightarrow{x_1} (\xrightarrow{\tau})^* \xrightarrow{x_2} (\xrightarrow{\tau})^* \ldots (\xrightarrow{\tau})^* \xrightarrow{x_n} (\xrightarrow{\tau})^* P'$.

$a.\tau.\tau.b.\tau.Nil \stackrel{ab}{\Rightarrow} Nil$

Slabá bisimulácia

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je slabá bisimulácia, ak $(P, Q) \in S$ implikuje pre každé $x \in Act$

1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Slabá bisimulácia

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je slabá bisimulácia, ak
$(P, Q) \in S$ implikuje pre každé $x \in Act$
1) ak $P \stackrel{x}{\rightarrow} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
2) ak $Q \stackrel{x}{\rightarrow} Q'$ tak existuje P' také, že $P \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Theorem

Nech S_1, S_2 sú slabé bisimulácie. Potom aj nasledovné relácie sú slabé bisimulácie
1) I_d
2) S^{-1}
3) $S_1 S_2$
4) $S_1 \cup S_2$

Slabá bisimulácia

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je slabá bisimulácia, ak $(P, Q) \in S$ implikuje pre každé $x \in Act$

1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \overset{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \overset{\hat{x}}{\Rightarrow} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Theorem

Nech S_1, S_2 sú slabé bisimulácie. Potom aj nasledovné relácie sú slabé bisimulácie
1) I_d
2) S^{-1}
3) $S_1 S_2$
4) $S_1 \cup S_2$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá bisimulácia

Definition

Procesy P a Q sú slabo bisimulárne ($P \approx Q$) ak $(P, Q) \in S$ pre nejakú slabú bisimuláciu S.
Ekvivalentná formulácia:
$\approx = \bigcup\{S | S \text{ je slabá bisimulácia } \}$

Slabá bisimulácia

Definition

Procesy P a Q sú slabo bisimulárne ($P \approx Q$) ak $(P, Q) \in S$ pre nejakú slabú bisimuláciu S.
Ekvivalentná formulácia:
$\approx = \bigcup\{S | S \text{ je slabá bisimulácia } \}$

Theorem

$\approx$ *je najväčšia slabá bisimulácia*
$\approx$ *je ekvivalencia*

Slabá bisimulácia

Definition

Procesy P a Q sú slabo bisimulárne ($P \approx Q$) ak $(P, Q) \in S$ pre nejakú slabú bisimuláciu S.
Ekvivalentná formulácia:
$\approx = \bigcup\{S | S \text{ je slabá bisimulácia }\}$

Theorem

$\approx$ *je najväčšia slabá bisimulácia*
$\approx$ *je ekvivalencia*

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá bisimulácia

Theorem

$P \approx Q$ *iff* $\forall x \in Act$

1) *ak* $P \xrightarrow{x} P'$ *tak existuje* Q' *také, že* $Q \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ *a platí* $P' \approx Q'$

2) *ak* $Q \xrightarrow{x} Q'$ *tak existuje* P' *také, že* $P \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} P'$ *a platí* $P' \approx Q'$

Slabá bisimulácia

Theorem

$P \approx Q$ *iff* $\forall x \in Act$

1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ *tak existuje* Q' *také, že* $Q \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ *a platí* $P' \approx Q'$

2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ *tak existuje* P' *také, že* $P \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} P'$ *a platí* $P' \approx Q'$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá bisimulácia

Theorem

$P \approx Q$ iff $\forall x \in Act$

1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \overset{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ a platí $P' \approx Q'$

2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \overset{\hat{x}}{\Rightarrow} P'$ a platí $P' \approx Q'$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je slabá bisimulácia až na $\approx$, ak $(P, Q) \in S$ implikuje

1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \overset{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ a platí $(P', Q') \in \approx S \approx$

2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \overset{\hat{x}}{\Rightarrow} P'$ a platí $(P', Q') \in \approx S \approx$

Slabá bisimulácia

Theorem

Ak S je slabá bisimulácia až na $\approx$, potom $\approx S \approx$ je slabá bisimulácia.

Slabá bisimulácia

Theorem

Ak S je slabá bisimulácia až na $\approx$, potom $\approx S \approx$ je slabá bisimulácia.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá bisimulácia

Theorem

Ak S je slabá bisimulácia až na $\approx$, potom $\approx S \approx$ je slabá bisimulácia.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

Ak S je slabá bisimulácia až na $\approx$ tak , potom $S \subseteq \approx$.

Slabá bisimulácia

Theorem

Ak S je slabá bisimulácia až na $\approx$, potom $\approx S \approx$ je slabá bisimulácia.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

Ak S je slabá bisimulácia až na $\approx$ tak , potom $S \subseteq \approx$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá bisimulácia

Theorem

$P \approx \tau.P$

Slabá bisimulácia

Theorem

$P \approx \tau.P$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

Nech $P_1 \approx P_2$*. Potom*

$$\begin{array}{rcl} x.P_1 & \approx & x.P_2 \\ P_1|Q & \approx & P_2|Q \\ P_1 \setminus L & \approx & P_2 \setminus L \\ P_1[f] & \approx & P_2[f] \end{array}$$

Theorem

$P \approx \tau.P$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

Nech $P_1 \approx P_2$. *Potom*

$$
\begin{array}{rcl}
x.P_1 & \approx & x.P_2 \\
P_1 | Q & \approx & P_2 | Q \\
P_1 \setminus L & \approx & P_2 \setminus L \\
P_1[f] & \approx & P_2[f]
\end{array}
$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá bisimulácia

Theorem

$P \approx \tau.P$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

Nech $P_1 \approx P_2$. *Potom*

$$\begin{array}{rcl} x.P_1 & \approx & x.P_2 \\ P_1|Q & \approx & P_2|Q \\ P_1 \setminus L & \approx & P_2 \setminus L \\ P_1[f] & \approx & P_2[f] \end{array}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá bisimulácia

Vo všeobecnosti neplatí
$P_1 \approx P_2$ implikuje $P_1 + Q \approx P_2 + Q$

Slabá bisimulácia

Vo všeobecnosti neplatí
$P_1 \approx P_2$ implikuje $P_1 + Q \approx P_2 + Q$

$a.Nil \approx \tau.a.Nil$ ale $a.Nil + b.Nil \not\approx \tau.a.Nil + b.Nil$

o-kongruencia (Observational congruence)

Definition

Procesy P, Q sú o-kongruentné $(P = Q)$ ak pre každé $x \in Act$
1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \overset{x}{\Rightarrow} Q'$ a platí $(P', Q') \in \approx$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \overset{x}{\Rightarrow} P'$ a platí $(P', Q') \in \approx$

Definition

$\Lambda(P) = \{x | \exists s, s \in Act^*, P \xrightarrow{sx}\}$

o-kongruencia (Observational congruence)

Definition

$$\Lambda(P) = \{x | \exists s, s \in Act^*, P \xrightarrow{sx}\}$$

$$\Lambda(a.b.d.Nil + c.Nil) = \{a, b, c, d\}$$

o-kongruencia (Observational congruence)

Theorem

Nech $\Lambda(P) \cup \Lambda(Q) \neq A$. *Potom* $P = Q$ *iff* $\forall R, P + R \approx Q + R$.

Theorem

Nech $\Lambda(P) \cup \Lambda(Q) \neq A$. Potom $P = Q$ iff $\forall R, P + R \approx Q + R$.

Dôkaz.

$\Rightarrow$

Ľahko sa ukáže, že
$\{(P + R, Q + R), P = Q\} \cup \approx$ je slabá bisimulácia.

o-kongruencia (Observational congruence)

$\Leftarrow$

$\Leftarrow$

Sporom. Predpokladajme, že $P \neq Q$.

$\Leftarrow$

Sporom. Predpokladajme, že $P \neq Q$.
Potom existuje x a P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ ale vždy keď $Q \overset{x}{\Rightarrow} Q'$ tak $P' \not\approx Q'$.

$\Leftarrow$
Sporom. Predpokladajme, že $P \neq Q$.
Potom existuje x a P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ ale vždy keď $Q \overset{x}{\Rightarrow} Q'$ tak $P' \not\approx Q'$.
Zoberme $R \equiv y.Nil, y \notin \Lambda(P) \cup \Lambda(Q)$

$\Leftarrow$
Sporom. Predpokladajme, že $P \neq Q$.
Potom existuje x a P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ ale vždy keď $Q \overset{x}{\Rightarrow} Q'$ tak $P' \not\approx Q'$.
Zoberme $R \equiv y.Nil, y \notin \Lambda(P) \cup \Lambda(Q)$
Vieme, že $P + R \xrightarrow{x} P'$.

$\Leftarrow$

Sporom. Predpokladajme, že $P \neq Q$.
Potom existuje x a P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ ale vždy keď $Q \stackrel{x}{\Rightarrow} Q'$ tak $P' \not\approx Q'$.
Zoberme $R \equiv y.Nil, y \notin \Lambda(P) \cup \Lambda(Q)$
Vieme, že $P + R \xrightarrow{x} P'$.
Ukážeme, že ak $Q + R \xrightarrow{x} Q'$ potom $P' \not\approx Q'$ t.j. $P + R \not\approx Q + R$.

$\Leftarrow$
Sporom. Predpokladajme, že $P \neq Q$.
Potom existuje x a P' také, že $P \stackrel{x}{\rightarrow} P'$ ale vždy keď $Q \stackrel{x}{\Rightarrow} Q'$ tak $P' \not\approx Q'$.
Zoberme $R \equiv y.Nil, y \notin \Lambda(P) \cup \Lambda(Q)$
Vieme, že $P + R \stackrel{x}{\rightarrow} P'$.
Ukážeme, že ak $Q + R \stackrel{x}{\rightarrow} Q'$ potom $P' \not\approx Q'$ t.j. $P + R \not\approx Q + R$.
Ak $x = \tau$ tak jedna možnosť je, že $Q' = Q + R$ ale potom $P' \not\approx Q'$ keďže $P' \stackrel{y}{\not\rightarrow}$ a $Q' \stackrel{y}{\rightarrow}$

o-kongruencia (Observational congruence)

$\Leftarrow$

Sporom. Predpokladajme, že $P \neq Q$.
Potom existuje x a P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ ale vždy keď $Q \overset{x}{\Rightarrow} Q'$ tak $P' \not\approx Q'$.
Zoberme $R \equiv y.Nil, y \notin \Lambda(P) \cup \Lambda(Q)$
Vieme, že $P + R \xrightarrow{x} P'$.
Ukážeme, že ak $Q + R \xrightarrow{x} Q'$ potom $P' \not\approx Q'$ t.j. $P + R \not\approx Q + R$.
Ak $x = \tau$ tak jedna možnosť je, že $Q' = Q + R$ ale potom $P' \not\approx Q'$ keďže $P' \overset{y}{\not\rightarrow}$ a $Q' \xrightarrow{y}$
inak $Q + R \overset{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ teda $Q \overset{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ a
$Q \overset{x}{\Rightarrow} Q'$

$\Leftarrow$

Sporom. Predpokladajme, že $P \neq Q$.
Potom existuje x a P' také, že $P \stackrel{x}{\rightarrow} P'$ ale vždy keď $Q \stackrel{x}{\Rightarrow} Q'$ tak $P' \not\approx Q'$.
Zoberme $R \equiv y.Nil, y \notin \Lambda(P) \cup \Lambda(Q)$
Vieme, že $P + R \stackrel{x}{\rightarrow} P'$.
Ukážeme, že ak $Q + R \stackrel{x}{\rightarrow} Q'$ potom $P' \not\approx Q'$ t.j. $P + R \not\approx Q + R$.
Ak $x = \tau$ tak jedna možnosť je, že $Q' = Q + R$ ale potom $P' \not\approx Q'$ keďže $P' \stackrel{y}{\not\rightarrow}$ a $Q' \stackrel{y}{\rightarrow}$
inak $Q + R \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ teda $Q \stackrel{\hat{x}}{\Rightarrow} Q'$ a
$Q \stackrel{x}{\Rightarrow} Q'$
a z predpokladu máme $P' \not\approx Q'$.