Modely konkurentných systémov
Formálne metódy tvorby softvéru

Damas Gruska

Katedra aplikovanej informatiky, I20, gruska@fmph.uniba.sk

Prednáška 5.

Neformálne význam formuly $< x > \phi$:

Modálna logika

Neformálne význam formuly $< x > \phi$:

P spĺňa $< x > \phi$ ak P vie vykonať akciu x a výsledný proces Q spĺňa ϕ.

Modálna logika

Neformálne význam formuly $< x > \phi$:

P spĺňa $< x > \phi$ ak P vie vykonať akciu x a výsledný proces Q spĺňa ϕ.

$\phi \equiv < x > tt \wedge \neg < y > tt$
proces môže vykonať akciu x a nemôže vykonať akciu y.

Modálna logika

Neformálne význam formuly $< x > \phi$:

P splĺňa $< x > \phi$ ak P vie vykonať akciu x a výsledný proces Q splĺňa ϕ.

$\phi \equiv < x > tt \wedge \neg < y > tt$
proces môže vykonať akciu x a nemôže vykonať akciu y.

$\phi \equiv < x > (< z > tt \wedge \neg < y > tt)$
proces môže vykonať akciu x a po jej vykonaní dosihne stav (proces), ktorý môže vykonať akciu z a nemôže vykonať akciu y.

Modálna logika

Definition

Definujme reláciu splniteľnosti ($\models$)medzi CCS a $\mathcal{PL}$:
(i) $P \models < x > \phi$ ak existuje P' také, že $P \stackrel{x}{\rightarrow} P'$ a $P' \models \phi$
(ii) $P \models \neg\phi$ ak $P \not\models \phi$
(iii) $P \models \wedge_{i \in I}\phi_i$ ak $\forall i, i \in I, P \models \phi_i$

Definition

Definujme reláciu splniteľnosti ($\models$)medzi CCS a $\mathcal{PL}$:
(i) $P \models < x > \phi$ ak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a $P' \models \phi$
(ii) $P \models \neg\phi$ ak $P \not\models \phi$
(iii) $P \models \wedge_{i \in I}\phi_i$ ak $\forall i, i \in I, P \models \phi_i$

$P \equiv a.(b.Nil + c.Nil), Q \equiv a.b.Nil + a.c.Nil$

Modálna logika

Definition

Definujme reláciu splniteľnosti ($\models$)medzi CCS a $\mathcal{PL}$:
(i) $P \models < x > \phi$ ak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a $P' \models \phi$
(ii) $P \models \neg\phi$ ak $P \not\models \phi$
(iii) $P \models \wedge_{i \in I}\phi_i$ ak $\forall i, i \in I, P \models \phi_i$

$P \equiv a.(b.Nil + c.Nil), Q \equiv a.b.Nil + a.c.Nil$
$\phi \equiv < a > (< b > tt \wedge < c > tt)$

Definition

Definujme reláciu splniteľnosti ($\models$)medzi CCS a $\mathcal{PL}$:
(i) $P \models < x > \phi$ ak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a $P' \models \phi$
(ii) $P \models \neg\phi$ ak $P \not\models \phi$
(iii) $P \models \wedge_{i \in I} \phi_i$ ak $\forall i, i \in I, P \models \phi_i$

$P \equiv a.(b.Nil + c.Nil), Q \equiv a.b.Nil + a.c.Nil$
$\phi \equiv < a > (< b > tt \wedge < c > tt)$
$P \models \phi$

Modálna logika

Definition

Definujme reláciu splniteľnosti ($\models$)medzi CCS a $\mathcal{PL}$:
(i) $P \models < x > \phi$ ak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a $P' \models \phi$
(ii) $P \models \neg\phi$ ak $P \not\models \phi$
(iii) $P \models \wedge_{i \in I} \phi_i$ ak $\forall i, i \in I, P \models \phi_i$

$P \equiv a.(b.Nil + c.Nil), Q \equiv a.b.Nil + a.c.Nil$
$\phi \equiv < a > (< b > tt \wedge < c > tt)$
$P \models \phi$
$Q \not\models \phi$

Modálna logika

$$
\begin{aligned}
ff &\stackrel{def}{=} \neg tt \\
\phi_1 \wedge \phi_2 &\stackrel{def}{=} \bigwedge_{i\in\{1,2\}}\phi_i \\
\bigvee_{i\in I}\phi_i &\stackrel{def}{=} \neg \bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i \\
\phi_1 \vee \phi_2 &\stackrel{def}{=} \bigvee_{i\in\{1,2\}}\phi_i \\
\phi_1 \Rightarrow \phi_2 &\stackrel{def}{=} \neg\phi_1 \vee \phi_2 \\
< x_1 \ldots x_n > \phi &\stackrel{def}{=} < x_1 > \cdots < x_n > \phi \\
[s]\phi &\stackrel{def}{=} \neg < s > \neg\phi, s \in Act^*
\end{aligned}
$$

Modálna logika

$$
\begin{aligned}
ff &\stackrel{def}{=} \neg tt \\
\phi_1 \wedge \phi_2 &\stackrel{def}{=} \bigwedge_{i \in \{1,2\}} \phi_i \\
\bigvee_{i \in I} \phi_i &\stackrel{def}{=} \neg \bigwedge_{i \in I} \neg \phi_i \\
\phi_1 \vee \phi_2 &\stackrel{def}{=} \bigvee_{i \in \{1,2\}} \phi_i \\
\phi_1 \Rightarrow \phi_2 &\stackrel{def}{=} \neg \phi_1 \vee \phi_2 \\
< x_1 \ldots x_n > \phi &\stackrel{def}{=} < x_1 > \cdots < x_n > \phi \\
[s]\phi &\stackrel{def}{=} \neg < s > \neg \phi, s \in Act^*
\end{aligned}
$$

$[s]ff$ - proces nemôže vykonať postupnosť akcii s.

Theorem

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ *je (silná) bisimulácia, iff* $(P, Q) \in S$ *implikuje* $\forall s, s \in Act^*$
1) ak $P \xrightarrow{s} P'$ *tak existuje* Q' *také, že* $Q \xrightarrow{s} Q'$ *a platí* $(P', Q') \in S$
2) ak $Q \xrightarrow{s} Q'$ *tak existuje* P' *také, že* $P \xrightarrow{s} P'$ *a platí* $(P', Q') \in S$

Modálna logika

Theorem

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ *je (silná) bisimulácia, iff*
$(P, Q) \in S$ *implikuje* $\forall s, s \in Act^*$
1) ak $P \xrightarrow{s} P'$ *tak existuje* Q' *také, že* $Q \xrightarrow{s} Q'$ *a platí* $(P', Q') \in S$
2) ak $Q \xrightarrow{s} Q'$ *tak existuje* P' *také, že* $P \xrightarrow{s} P'$ *a platí* $(P', Q') \in S$

Definition

- $P \sim_0 Q$ pre každé P, Q ($\sim_0 = CCS \times CCS$)
- $P \sim_{k+1} Q$ ak $\forall s, s \in Act^*$
1) ak $P \xrightarrow{s} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{s} Q'$ a platí $P' \sim_k Q'$
2) ak $Q \xrightarrow{s} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{s} P'$ a platí $P' \sim_k Q'$
- pre každý limitný ordinál λ
$P \sim_\lambda Q$ ak $\forall k, k < \lambda$ platí $P \sim_k Q$ ($\sim_\lambda = \cap_{k<\lambda} \sim_k$).

Theorem

Ak $k < l$ *tak* $\sim_l \subseteq \sim_k$.

Modálna logika

Theorem

Ak $k < l$ *tak* $\sim_l \subseteq \sim_k$.

Theorem

$\sim = \bigcap_{k \in \mathcal{O}} \sim_k$

Modálna logika

Uvažujme modifikáciu $\mathcal{PL}$ takú, že za základný operátor budeme považovaž $< s >$ pre $s \in Act^*$.

Definition

$$\begin{aligned}
depth(< s > \phi) &\stackrel{def}{=} depth(\phi) + 1 \\
depth(\neg\phi) &\stackrel{def}{=} depth(\phi) \\
depth(\wedge_{i\in I}\phi_i) &\stackrel{def}{=} sup_{i\in I}\{depth(\phi_i)\}
\end{aligned}$$

Pre každý ordinál k definujeme:
$\mathcal{PL}_k = \{\phi, depth(\phi) \leq k\}$

Theorem

(i) Pre každý ordinál k platí

$P \sim_k Q$ *iff pre každé* $\phi, \phi \in \mathcal{PL}_k$, $P \models \phi \Leftrightarrow Q \models \phi$.

(ii) $P \sim Q$ *iff pre každé* $\phi, \phi \in \mathcal{PL}$, $P \models \phi \Leftrightarrow Q \models \phi$.

Bisimulácia

Bisimulácia

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je (silná) bisimulácia, ak $(P, Q) \in S$ implikuje
1) ak $P \stackrel{x}{\rightarrow} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \stackrel{x}{\rightarrow} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
2) ak $Q \stackrel{x}{\rightarrow} Q'$ tak existuje P' také, že $P \stackrel{x}{\rightarrow} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Bisimulácia

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je (silná) bisimulácia, ak $(P, Q) \in S$ implikuje
1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Definition

Procesy P a Q sú silne bisimulárne ($P \sim Q$) ak $(P, Q) \in S$ pre nejakú silnú bisimuláciu S.
Ekvivalentná formulácia:
$\sim = \bigcup \{S | S \text{ je silná bisimulácia }\}$

Silná bisimulácia ako pevný bod

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Definujme $f : CCS \times CCS \to CCS \times CCS$: ak $R \subseteq CCS \times CCS$ tak $(P, Q) \in f(R)$ iff (if and only if) pre každé $x \in Act$ platí

1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in R$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in R$

Silná bisimulácia ako pevný bod

Definition

Definujme $f : CCS \times CCS \to CCS \times CCS$: ak $R \subseteq CCS \times CCS$ tak $(P, Q) \in f(R)$ iff (if and only if) pre každé $x \in Act$ platí

1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in R$
2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in R$

Theorem

1. $\sim$ je najväčší pevný bod f, t.j. $\sim = f(\sim)$,

Axiomatizácia

Theorem

$P \sim Q$ *iff* $\mathcal{A}_1 \vdash P = Q$.

Axiomatizácia

Theorem

$P \sim Q$ iff $\mathcal{A}_1 \vdash P = Q$.

Theorem

$P \sim Q$ iff pre každé $\phi, \phi \in \mathcal{PL}$, $P \models \phi \Leftrightarrow Q \models \phi$.

Stopová ekvivalencia

Stopová ekvivalencia

Dva procesy sú stopovo ekvivalentné ($\sim_{trace}$) ak majú rovnaké stopy (stopa/trace procesu je postupnosť akcií, ktorú vie vykonať).

Stopová ekvivalencia

Dva procesy sú stopovo ekvivalentné ($\sim_{trace}$) ak majú rovnaké stopy (stopa/trace procesu je postupnosť akcií, ktorú vie vykonať).

$Tr(P) = \{s | s \in Act^* \text{ také, že } P \xrightarrow{s}\}$

Stopová ekvivalencia

Dva procesy sú stopovo ekvivalentné ($\sim_{trace}$) ak majú rovnaké stopy (stopa/trace procesu je postupnosť akcií, ktorú vie vykonať).

$$Tr(P) = \{s | s \in Act^* \text{ také, že } P \xrightarrow{s}\}$$

$$Tr(Nil) = \{\epsilon\}$$

Stopová ekvivalencia

Dva procesy sú stopovo ekvivalentné ($\sim_{trace}$) ak majú rovnaké stopy (stopa/trace procesu je postupnosť akcií, ktorú vie vykonať).

$Tr(P) = \{s | s \in Act^* \text{ také, že } P \xrightarrow{s}\}$

$Tr(Nil) = \{\epsilon\}$
$Tr(a.(.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$

Stopová ekvivalencia

Dva procesy sú stopovo ekvivalentné ($\sim_{trace}$) ak majú rovnaké stopy (stopa/trace procesu je postupnosť akcií, ktorú vie vykonať).

$$Tr(P) = \{s | s \in Act^* \text{ také, že } P \xrightarrow{s}\}$$

$$Tr(Nil) = \{\epsilon\}$$
$$Tr(a.(.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$$

Definition

$P \sim_{trace} Q$ iff $Tr(P) = Tr(Q)$

Stopová ekvivalencia

Dva procesy sú stopovo ekvivalentné ($\sim_{trace}$) ak majú rovnaké stopy (stopa/trace procesu je postupnosť akcií, ktorú vie vykonať).

$Tr(P) = \{s | s \in Act^*$ také, že $P \xrightarrow{s}\}$

$Tr(Nil) = \{\epsilon\}$
$Tr(a.(.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$

Definition

$P \sim_{trace} Q$ iff $Tr(P) = Tr(Q)$

$a.(b.Nil + c.Nil) \sim_{trace} a.b.Nil + a.c.Nil$

Stopová ekvivalencia

Dva procesy sú stopovo ekvivalentné ($\sim_{trace}$) ak majú rovnaké stopy (stopa/trace procesu je postupnosť akcií, ktorú vie vykonať).

$Tr(P) = \{s | s \in Act^*$ také, že $P \xrightarrow{s}\}$

$Tr(Nil) = \{\epsilon\}$
$Tr(a.(.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$

Definition

$P \sim_{trace} Q$ iff $Tr(P) = Tr(Q)$

$a.(b.Nil + c.Nil) \sim_{trace} a.b.Nil + a.c.Nil$
$a.(b.Nil + c.Nil) + a.b.Nil \sim_{trace} a.b.Nil + a.c.Nil$

Stopová ekvivalencia

Dva procesy sú stopovo ekvivalentné ($\sim_{trace}$) ak majú rovnaké stopy (stopa/trace procesu je postupnosť akcií, ktorú vie vykonať).

$$Tr(P) = \{s | s \in Act^* \text{ také, že } P \xrightarrow{s}\}$$

$$Tr(Nil) = \{\epsilon\}$$
$$Tr(a.(.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$$

Definition

$P \sim_{trace} Q$ iff $Tr(P) = Tr(Q)$

$$a.(b.Nil + c.Nil) \sim_{trace} a.b.Nil + a.c.Nil$$
$$a.(b.Nil + c.Nil) + a.b.Nil \sim_{trace} a.b.Nil + a.c.Nil$$
$$a.(b.Nil + c.Nil) + a.Nil \sim_{trace} a.b.Nil + a.c.Nil$$

Stopová ekvivalencia

Theorem

$\sim_{trace}$ *je ekvivalencia.*

Stopová ekvivalencia

Theorem

$\sim_{trace}$ *je ekvivalencia.*

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Stopová ekvivalencia

Theorem

$\sim_{trace}$ je ekvivalencia.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

$$
\begin{aligned}
P + Q &\sim_{trace} Q + P \\
P + (Q + R) &\sim_{trace} (P + Q) + R \\
P + P &\sim_{trace} P \\
P + Nil &\sim_{trace} P \\
x.(P + Q) &\sim_{trace} x.P + x.Q
\end{aligned}
$$

Stopová ekvivalencia

Theorem

$\sim_{trace}$ je ekvivalencia.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

$$\begin{array}{rcl} P + Q & \sim_{trace} & Q + P \\ P + (Q + R) & \sim_{trace} & (P + Q) + R \\ P + P & \sim_{trace} & P \\ P + Nil & \sim_{trace} & P \\ x.(P + Q) & \sim_{trace} & x.P + x.Q \end{array}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Stopová ekvivalencia

Theorem

$\sim \subset \sim_{trace}$

Stopová ekvivalencia

Theorem

$\sim \subset \sim_{trace}$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

Nech $P_1 \sim_{trace} P_2$. *Potom*

$$\begin{aligned} x.P_1 &\sim_{trace} x.P_2 \\ P_1 + Q &\sim_{trace} P_2 + Q \\ P_1|Q &\sim_{trace} P_2|Q \\ P_1 \setminus L &\sim_{trace} P_2 \setminus L \\ P_1[f] &\sim_{trace} P_2[f] \end{aligned}$$

Stopová ekvivalencia

Theorem

$\sim \subset \sim_{trace}$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

Nech $P_1 \sim_{trace} P_2$. Potom

$$\begin{array}{rcl} x.P_1 & \sim_{trace} & x.P_2 \\ P_1 + Q & \sim_{trace} & P_2 + Q \\ P_1|Q & \sim_{trace} & P_2|Q \\ P_1 \setminus L & \sim_{trace} & P_2 \setminus L \\ P_1[f] & \sim_{trace} & P_2[f] \end{array}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Stopová ekvivalencia

Definition

- $P \sim_0 Q$ pre každé P, Q ($\sim_0 = CCS \times CCS$)
- $P \sim_{k+1} Q$ ak $\forall s, s \in Act^*$

1) ak $P \xrightarrow{s} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{s} Q'$ a platí $P' \sim_k Q'$
2) ak $Q \xrightarrow{s} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{s} P'$ a platí $P' \sim_k Q'$

Pozorovanie - $\sim_1 = \sim_{trace}$.

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Definition

Proces je konečný ak neobsahuje rekurziu. Proces je sériový, ak neobsahuje operátory $|, \backslash, [f]$.

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Definition

Proces je konečný ak neobsahuje rekurziu. Proces je sériový, ak neobsahuje operátory $|, \backslash, [f]$.

Každý konečný proces je stopovo ekvivalentný nejakému konečnému sériovému procesu.

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Definition

Proces je konečný ak neobsahuje rekurziu. Proces je sériový, ak neobsahuje operátory $|, \backslash, [f]$.

Každý konečný proces je stopovo ekvivalentný nejakému konečnému sériovému procesu.

V ďalšom sa budeme zaoberať len konečnými sériovými procesmi.

Definition

P je v stopovej forme ak $P \equiv \sum_{i=1}^{n} s_i.Nil$ kde každé $s_i \in Tr(P)$.

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Definition

P je v stopovej forme ak $P \equiv \sum_{i=1}^{n} s_i.Nil$ kde každé $s_i \in Tr(P)$.

$a.(a.Nil + b.Nil)$

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Definition

P je v stopovej forme ak $P \equiv \sum_{i=1}^{n} s_i.Nil$ kde každé $s_i \in Tr(P)$.

$a.(a.Nil + b.Nil)$

$Nil + a.Nil + a.a.Nil + a.b.Nil$

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

$\mathcal{A}_3$:

$$
\begin{array}{rcll}
P + Q & = & Q + P & A1 \\
P + (Q + R) & = & (Q + P) + R & A2 \\
P + P & = & P & A3 \\
P + Nil & = & P & A4 \\
x.(P + Q) & = & x.P + x.Q & A8
\end{array}
$$

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Theorem

Pre každé P existuje P' v stopovej forme, také že $\mathcal{A}_3 \vdash P = P'$.

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Theorem

Pre každé P existuje P' v stopovej forme, také že $\mathcal{A}_3 \vdash P = P'$.

Dôkaz.

Theorem

Pre každé P existuje P' v stopovej forme, také že $\mathcal{A}_3 \vdash P = P'$.

Dôkaz.

Vieme, že pre každé Q existuje Q' v štandardnej forme, také že $\mathcal{A}_1 \vdash Q = Q'$.

Theorem

Pre každé P existuje P' v stopovej forme, také že $\mathcal{A}_3 \vdash P = P'$.

Dôkaz.

Vieme, že pre každé Q existuje Q' v štandardnej forme, také že $\mathcal{A}_1 \vdash Q = Q'$.

Môžeme teda predpokladať, že P je v štandardnej forme, t.j. $P \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i.P_i$ kde každé P_i je opäť v štandardnej forme.

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Theorem

Pre každé P existuje P' v stopovej forme, také že $\mathcal{A}_3 \vdash P = P'$.

Dôkaz.

Vieme, že pre každé Q existuje Q' v štandardnej forme, také že $\mathcal{A}_1 \vdash Q = Q'$.

Môžeme teda predpokladať, že P je v štandardnej forme, t.j. $P \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i.P_i$ kde každé P_i je opäť v štandardnej forme.

Potom pre každé $P_i \equiv \sum_{j=1}^{m} x'_j.P'_j$ máme:

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Theorem

Pre každé P existuje P' v stopovej forme, také že $\mathcal{A}_3 \vdash P = P'$.

Dôkaz.

Vieme, že pre každé Q existuje Q' v štandardnej forme, také že $\mathcal{A}_1 \vdash Q = Q'$.

Môžeme teda predpokladať, že P je v štandardnej forme, t.j. $P \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i.P_i$ kde každé P_i je opäť v štandardnej forme.

Potom pre každé $P_i \equiv \sum_{j=1}^{m} x_j'.P_j'$ máme:

$$\mathcal{A}_3 \vdash x_i.\sum_{j=1}^{m} x_j'.P_j' = \sum_{j=1}^{m} x_i.x_j'.P_j'.$$

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Theorem

$P \sim_{trace} Q$ *iff* $\mathcal{A}_3 \vdash P = Q$.

Stopová ekvivalencia - axiomatizácia

Theorem

$P \sim_{trace} Q$ *iff* $\mathcal{A}_3 \vdash P = Q$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Modálna logika

Theorem

$P \sim_{trace} Q$ *iff pre každé* $\phi, \phi \equiv < s > tt$, $P \models \phi \Leftrightarrow Q \models \phi$.

Theorem

$P \sim_{trace} Q$ *iff pre každé* $\phi, \phi \equiv < s > tt$, $P \models \phi \Leftrightarrow Q \models \phi$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá stopová ekvivalencia

Dva procesy sú slabo stopovo ekvivalentné ($\approx_{trace}$) ak majú rovnaké viditeľné stopy (viditeľná stopa/trace procesu je postupnosť akcií rôznych od τ, ktorú vie vykonať vzhľadom na reláciu $\Rightarrow$).

Slabá stopová ekvivalencia

Dva procesy sú slabo stopovo ekvivalentné ($\approx_{trace}$) ak majú rovnaké viditeľné stopy (viditeľná stopa/trace procesu je postupnosť akcií rôznych od τ, ktorú vie vykonať vzhľadom na reláciu $\Rightarrow$).

$Tr_w(P) = \{s|s \in A^*$ také, že $P \stackrel{s}{\Rightarrow}\}$

Slabá stopová ekvivalencia

Dva procesy sú slabo stopovo ekvivalentné ($\approx_{trace}$) ak majú rovnaké viditeľné stopy (viditeľná stopa/trace procesu je postupnosť akcií rôznych od τ, ktorú vie vykonať vzhľadom na reláciu $\Rightarrow$).

$$Tr_w(P) = \{s | s \in A^* \text{ také, že } P \overset{s}{\Rightarrow}\}$$

$$Tr_w(\tau.Nil) = \{\epsilon\}$$

Slabá stopová ekvivalencia

Dva procesy sú slabo stopovo ekvivalentné ($\approx_{trace}$) ak majú rovnaké viditeľné stopy (viditeľná stopa/trace procesu je postupnosť akcií rôznych od τ, ktorú vie vykonať vzhľadom na reláciu $\Rightarrow$).

$Tr_w(P) = \{s | s \in A^*$ také, že $P \stackrel{s}{\Rightarrow}\}$

$Tr_w(\tau.Nil) = \{\epsilon\}$
$Tr_w(a.\tau.(\tau.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$

Slabá stopová ekvivalencia

Dva procesy sú slabo stopovo ekvivalentné ($\approx_{trace}$) ak majú rovnaké viditeľné stopy (viditeľná stopa/trace procesu je postupnosť akcií rôznych od τ, ktorú vie vykonať vzhľadom na reláciu $\Rightarrow$).

$$Tr_w(P) = \{s | s \in A^* \text{ také, že } P \stackrel{s}{\Rightarrow}\}$$

$$Tr_w(\tau.Nil) = \{\epsilon\}$$
$$Tr_w(a.\tau.(\tau.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$$

Definition

$P \approx_{trace} Q$ iff $Tr_w(P) = Tr_w(Q)$

Slabá stopová ekvivalencia

Dva procesy sú slabo stopovo ekvivalentné ($\approx_{trace}$) ak majú rovnaké viditeľné stopy (viditeľná stopa/trace procesu je postupnosť akcií rôznych od τ, ktorú vie vykonať vzhľadom na reláciu $\Rightarrow$).

$$Tr_w(P) = \{s | s \in A^* \text{ také, že } P \stackrel{s}{\Rightarrow}\}$$

$$Tr_w(\tau.Nil) = \{\epsilon\}$$
$$Tr_w(a.\tau.(\tau.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$$

Definition

$P \approx_{trace} Q$ iff $Tr_w(P) = Tr_w(Q)$

$$a.\tau.(b.Nil + c.Nil) \approx_{trace} a.b.\tau.Nil + \tau.a.c.Nil$$

Slabá stopová ekvivalencia

Dva procesy sú slabo stopovo ekvivalentné ($\approx_{trace}$) ak majú rovnaké viditeľné stopy (viditeľná stopa/trace procesu je postupnosť akcií rôznych od τ, ktorú vie vykonať vzhľadom na reláciu $\Rightarrow$).

$$Tr_w(P) = \{s | s \in A^* \text{ také, že } P \stackrel{s}{\Rightarrow}\}$$

$$Tr_w(\tau.Nil) = \{\epsilon\}$$
$$Tr_w(a.\tau.(\tau.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$$

Definition

$P \approx_{trace} Q$ iff $Tr_w(P) = Tr_w(Q)$

$$a.\tau.(b.Nil + c.Nil) \approx_{trace} a.b.\tau.Nil + \tau.a.c.Nil$$
$$a.(b.Nil + c.Nil) + a.b.Nil \approx_{trace} a.b.Nil + \tau.Nil + \tau.a.c.Nil$$

Slabá stopová ekvivalencia

Dva procesy sú slabo stopovo ekvivalentné ($\approx_{trace}$) ak majú rovnaké viditeľné stopy (viditeľná stopa/trace procesu je postupnosť akcií rôznych od τ, ktorú vie vykonať vzhľadom na reláciu $\Rightarrow$).

$$Tr_w(P) = \{s | s \in A^* \text{ také, že } P \stackrel{s}{\Rightarrow}\}$$

$$Tr_w(\tau.Nil) = \{\epsilon\}$$
$$Tr_w(a.\tau.(\tau.b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$$

Definition

$P \approx_{trace} Q$ iff $Tr_w(P) = Tr_w(Q)$

$$a.\tau.(b.Nil + c.Nil) \approx_{trace} a.b.\tau.Nil + \tau.a.c.Nil$$
$$a.(b.Nil + c.Nil) + a.b.Nil \approx_{trace} a.b.Nil + \tau.Nil + \tau.a.c.Nil$$
$$a.(b.Nil + c.Nil) + a.\tau.\tau.Nil \approx_{trace}$$
$$a.\tau.b.Nil + \tau.a.c.Nil + \tau.\tau.\tau.\tau.a.c.\tau.Nil$$

Slabá stopová ekvivalencia

Theorem

$\approx_{trace}$ *je ekvivalencia.*

Theorem

$\approx_{trace}$ *je ekvivalencia.*

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá stopová ekvivalencia

Theorem

$\approx_{trace}$ *je ekvivalencia.*

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

$$\begin{aligned} x.(P+Q) &\approx_{trace} x.P + x.Q \\ (P+Q)|R &\approx_{trace} (P|R) + (Q|R) \\ P &\approx_{trace} \tau.P \end{aligned}$$

Slabá stopová ekvivalencia

Theorem

$\approx_{trace}$ *je ekvivalencia.*

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

$$\begin{array}{rcl} x.(P+Q) & \approx_{trace} & x.P + x.Q \\ (P+Q)|R & \approx_{trace} & (P|R)+(Q|R) \\ P & \approx_{trace} & \tau.P \end{array}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Slabá stopová ekvivalencia

Theorem

$\approx \subset \approx_{trace}$.

Slabá stopová ekvivalencia

Theorem

$\approx \subset \approx_{trace}$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

Nech $P_1 \approx_{trace} P_2$*. Potom*

$$\begin{aligned}
x.P_1 &\approx_{trace} x.P_2 \\
P_1 + Q &\approx_{trace} P_2 + Q \\
P_1|Q &\approx_{trace} P_2|Q \\
P_1 \setminus L &\approx_{trace} P_2 \setminus L \\
P_1[f] &\approx_{trace} P_2[f]
\end{aligned}$$

Slabá stopová ekvivalencia

Theorem

$\approx \subset \approx_{trace}$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

Nech $P_1 \approx_{trace} P_2$. *Potom*

$$\begin{array}{rcl} x.P_1 & \approx_{trace} & x.P_2 \\ P_1 + Q & \approx_{trace} & P_2 + Q \\ P_1|Q & \approx_{trace} & P_2|Q \\ P_1 \setminus L & \approx_{trace} & P_2 \setminus L \\ P_1[f] & \approx_{trace} & P_2[f] \end{array}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Ekvivalencia neúspechu

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Neúspech je dvojica (s, L) kde $s \in A^*, L \subseteq A$.
Neúspech (s, L) patrí procesu P ak existuje P', taký, že
(i) $P \stackrel{s}{\Rightarrow} P'$,
(ii) $P' \stackrel{\tau}{\not\rightarrow}$,
(ii) $\forall a, a \in L, P' \stackrel{a}{\not\rightarrow}$.

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Neúspech je dvojica (s, L) kde $s \in A^*, L \subseteq A$.
Neúspech (s, L) patrí procesu P ak existuje P', taký, že
(i) $P \stackrel{s}{\Rightarrow} P'$,
(ii) $P' \stackrel{\tau}{\nrightarrow}$,
(ii) $\forall a, a \in L, P' \stackrel{a}{\nrightarrow}$.

Nech $a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Neúspech je dvojica (s, L) kde $s \in A^*, L \subseteq A$.
Neúspech (s, L) patrí procesu P ak existuje P', taký, že
(i) $P \stackrel{s}{\Rightarrow} P'$,
(ii) $P' \stackrel{\tau}{\not\rightarrow}$,
(ii) $\forall a, a \in L, P' \stackrel{a}{\not\rightarrow}$.

Nech $a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$
Neúspechy tohoto procesu sú:

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Neúspech je dvojica (s, L) kde $s \in A^*, L \subseteq A$.
Neúspech (s, L) patrí procesu P ak existuje P', taký, že
(i) $P \overset{s}{\Rightarrow} P'$,
(ii) $P' \overset{\tau}{\not\rightarrow}$,
(ii) $\forall a, a \in L, P' \overset{a}{\not\rightarrow}$.

Nech $a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$
Neúspechy tohoto procesu sú:
(ϵ, L) pre každé L také, že $a \notin L$

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Neúspech je dvojica (s, L) kde $s \in A^*, L \subseteq A$.
Neúspech (s, L) patrí procesu P ak existuje P', taký, že
(i) $P \stackrel{s}{\Rightarrow} P'$,
(ii) $P' \stackrel{\tau}{\not\to}$,
(ii) $\forall a, a \in L, P' \stackrel{a}{\not\to}$.

Nech $a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$
Neúspechy tohoto procesu sú:
(ϵ, L) pre každé L také, že $a \notin L$
(a, L) pre každé L také, že $b \notin L$

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Neúspech je dvojica (s, L) kde $s \in A^*, L \subseteq A$.
Neúspech (s, L) patrí procesu P ak existuje P', taký, že
(i) $P \stackrel{s}{\Rightarrow} P'$,
(ii) $P' \stackrel{\tau}{\not\to}$,
(ii) $\forall a, a \in L, P' \stackrel{a}{\not\to}$.

Nech $a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$
Neúspechy tohoto procesu sú:
(ϵ, L) pre každé L také, že $a \notin L$
(a, L) pre každé L také, že $b \notin L$
$(a.b, L)$ pre každé L také, že $\{c, d\} \not\subseteq L$

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Neúspech je dvojica (s, L) kde $s \in A^*, L \subseteq A$.
Neúspech (s, L) patrí procesu P ak existuje P', taký, že
(i) $P \stackrel{s}{\Rightarrow} P'$,
(ii) $P' \stackrel{\tau}{\not\to}$,
(ii) $\forall a, a \in L, P' \stackrel{a}{\not\to}$.

Nech $a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$
Neúspechy tohoto procesu sú:
(ϵ, L) pre každé L také, že $a \notin L$
(a, L) pre každé L také, že $b \notin L$
$(a.b, L)$ pre každé L také, že $\{c, d\} \not\subseteq L$
$(a.b.c, L), (a.b.d, L)$ pre každé L

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Procesy P a Q sú ekvivalentné vzhľadom na neúspech, $(P \approx_f Q)$ ak majú rovnaké neúspechy.

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Procesy P a Q sú ekvivalentné vzhľadom na neúspech, ($P \approx_f Q$) ak majú rovnaké neúspechy.

Theorem

$\approx_f \subset \approx_{trace}$.

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Procesy P a Q sú ekvivalentné vzhľadom na neúspech, ($P \approx_f Q$) ak majú rovnaké neúspechy.

Theorem

$\approx_f \subset \approx_{trace}$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Procesy P a Q sú ekvivalentné vzhľadom na neúspech, ($P \approx_f Q$) ak majú rovnaké neúspechy.

Theorem

$\approx_f \subset \approx_{trace}$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Rovnosť neplatí:
$P \equiv a.(b.Nil + c.Nil)$
$Q \equiv a.b.Nil + a.c.Nil$

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Procesy P a Q sú ekvivalentné vzhľadom na neúspech, ($P \approx_f Q$) ak majú rovnaké neúspechy.

Theorem

$\approx_f \subset \approx_{trace}$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Rovnosť neplatí:
$P \equiv a.(b.Nil + c.Nil)$
$Q \equiv a.b.Nil + a.c.Nil$

$P \approx_{trace} Q$ ale $P \not\approx_f Q$

Ekvivalencia neúspechu

Definition

Procesy P a Q sú ekvivalentné vzhľadom na neúspech, $(P \approx_f Q)$ ak majú rovnaké neúspechy.

Theorem

$\approx_f \subset \approx_{trace}$.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Rovnosť neplatí:
$P \equiv a.(b.Nil + c.Nil)$
$Q \equiv a.b.Nil + a.c.Nil$

$P \approx_{trace} Q$ ale $P \not\approx_f Q$
$(a, \{b\})$ je neúspech len procesu Q.

Ekvivalencia neúspechu

$P \equiv a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$
$Q \equiv a.b.c.Nil + a.b.d.Nil$

Ekvivalencia neúspechu

$P \equiv a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$
$Q \equiv a.b.c.Nil + a.b.d.Nil$

$P \approx_f Q$ ale $P \not\approx Q$

Ekvivalencia neúspechu

$$P \equiv a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$$
$$Q \equiv a.b.c.Nil + a.b.d.Nil$$

$P \approx_f Q$ ale $P \not\approx Q$

$$P \equiv \mu X \tau.X$$
$$Q \equiv \mu X \tau.X + \tau.Nil$$

Ekvivalencia neúspechu

$P \equiv a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$
$Q \equiv a.b.c.Nil + a.b.d.Nil$

$P \approx_f Q$ ale $P \not\approx Q$

$P \equiv \mu X \tau.X$
$Q \equiv \mu X \tau.X + \tau.Nil$

$P \not\approx_f Q$ ale $P \approx Q$

Ekvivalencia neúspechu

$$P \equiv a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$$
$$Q \equiv a.b.c.Nil + a.b.d.Nil$$

$P \approx_f Q$ ale $P \not\approx Q$

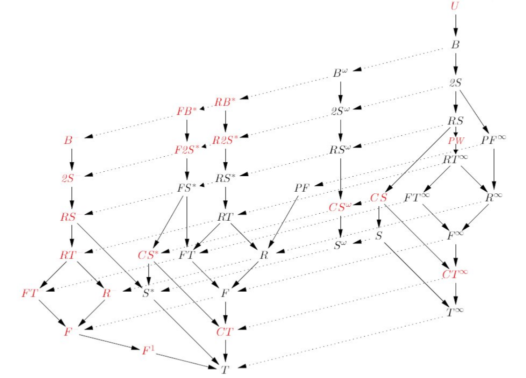
$$P \equiv \mu X \tau.X$$
$$Q \equiv \mu X \tau.X + \tau.Nil$$

$P \not\approx_f Q$ ale $P \approx Q$

Theorem

$x.(y.P + y.Q) \approx_f x.y.P + x.y.Q.$

Iné ekvivalencie



Iné ekvivalencie

	B	RS	PW	RT	FT	R	F	CS	CT	S	T
$(x+y)+z \;=\; x+(y+z)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x+y \;=\; y+x$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x+0 \;=\; x$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x+x \;=\; x$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$ax \;\sqsubseteq\; ax+ay$		+	+	+	+	+	+	v	v	v	v
$a(bx+by+z) \;=\; a(bx+z)+a(by+z)$			+	v	v	v	v		v		v
$I(x) \;=\; I(y) \;\Rightarrow\; ax+ay \;=\; a(x+y)$				+	v	v	v		v		v
$ax+ay \;\sqsupseteq\; a(x+y)$					+		v		v		v
$a(bx+u)+a(by+v) \;\sqsupseteq\; a(bx+by+u)$						+	v		v		v
$ax+a(y+z) \;\sqsupseteq\; a(x+y)$							+		v		v
$ax \;\sqsubseteq\; ax+y$								+	+	v	v
$a(bx+u)+a(cy+v) \;=\; a(bx+cy+u+v)$									+		v
$x \;\sqsubseteq\; x+y$										+	+
$ax+ay \;=\; a(x+y)$											+
$I(0) \;=\; 0$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$I(ax) \;=\; a0$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$I(x+y) \;=\; I(x)+I(y)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Iné procesové algebry

J.A. Bergstra a J.W. Klop
Algebra of Communicating Processes, skrátene ACP, 1985

Iné procesové algebry

J.A. Bergstra a J.W. Klop
Algebra of Communicating Processes, skrátene ACP, 1985
Baeten J.A., W.P. Weijland: *Process Algebra*. Cambridge University Press, 1990.

ACP

A - množina atomických akcií

ACP

A - množina atomických akcií

$\gamma : A \times A \rightarrow A$ čiastočná funkcia taká, že

ACP

A - množina atomických akcií

$\gamma : A \times A \rightarrow A$ čiastočná funkcia taká, že
$\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$

ACP

A - množina atomických akcií

$\gamma : A \times A \to A$ čiastočná funkcia taká, že
$\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$
$\gamma(a, \gamma(b, c)) = \gamma(\gamma(a, b), c)$

ACP

A - množina atomických akcií

$\gamma : A \times A \to A$ čiastočná funkcia taká, že
$\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$
$\gamma(a, \gamma(b, c)) = \gamma(\gamma(a, b), c)$

Ak je $\gamma(a, b)$ definované, tak budeme písať $\gamma(a, b) \downarrow$ t.j.
$\gamma(a, b) = c$.
Slovom a a b komunikujú.

ACP

A - množina atomických akcií

$\gamma : A \times A \rightarrow A$ čiastočná funkcia taká, že
$\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$
$\gamma(a, \gamma(b, c)) = \gamma(\gamma(a, b), c)$

Ak je $\gamma(a, b)$ definované, tak budeme písať $\gamma(a, b) \downarrow$ t.j.
$\gamma(a, b) = c$.
Slovom a a b komunikujú.

Konštanta:
Nil

ACP

A - množina atomických akcií

$\gamma : A \times A \to A$ čiastočná funkcia taká, že
$\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$
$\gamma(a, \gamma(b, c)) = \gamma(\gamma(a, b), c)$

Ak je $\gamma(a, b)$ definované, tak budeme písať $\gamma(a, b) \downarrow$ t.j.
$\gamma(a, b) = c$.
Slovom a a b komunikujú.

Konštanta:
Nil

Unárne operácie:
δ_H pre $H \subseteq A$

ACP

A - množina atomických akcií

$\gamma : A \times A \to A$ čiastočná funkcia taká, že
$\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$
$\gamma(a, \gamma(b, c)) = \gamma(\gamma(a, b), c)$

Ak je $\gamma(a, b)$ definované, tak budeme písať $\gamma(a, b) \downarrow$ t.j.
$\gamma(a, b) = c$.
Slovom a a b komunikujú.

Konštanta:
Nil

Unárne operácie:
δ_H pre $H \subseteq A$

Binárne operácie:
$+, ., ||, ⌊⌊, |$

ACP

$$
\begin{aligned}
P + Q &= Q + P \\
P + (Q + R) &= (P + Q) + R \\
P + P &= P \\
(P + Q).R &= P.R + Q.R \\
(P.Q).R &= P.(R.Q) \\
P + Nil &= P \\
Nil.P &= Nil
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a|b &= \gamma(a, b) \text{ ak } \gamma(a, b)\downarrow \\
a|b &= Nil \text{ inak}
\end{aligned}
$$

ACP

$$
\begin{array}{rcl}
P||Q & = & P\lfloor\lfloor Q + Q\lfloor\lfloor P + P|Q \\
a\lfloor\lfloor P & = & a.P \\
a.P\lfloor\lfloor Q & = & a.(P||Q) \\
(P+Q)\lfloor\lfloor R & = & P\lfloor\lfloor R + Q\lfloor\lfloor R \\
a|b.P & = & (a|b).P \\
a.P|b.Q & = & (a|b).(P||Q) \\
(P+Q)|R & = & P|R + Q|R \\
R|(P+Q) & = & R|P + R|Q
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
\delta_H(a) & = & a \text{ ak } a \notin H \\
\delta_H(a) & = & \mathit{Nil} \text{ ak } a \in H \\
\delta_H(P+Q) & = & \delta_H(P) + \delta_H(Q) \\
\delta_H(P.Q) & = & \delta_H(P).\delta_H(Q)
\end{array}
$$

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

C.A.R.Hoare
Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

$P||_H Q$ pre $H \subseteq A$

$P||_H Q$ pre $H \subseteq A$

$$\frac{P \xrightarrow{a} P', Q \xrightarrow{a} Q', a \in H}{P||_H Q \xrightarrow{a} P'||_H Q'}$$

Synchrónny kalkulus

komutatívna grupa $(Act, 1, \times, ^{\overline{\ }})$

Synchrónny kalkulus

komutatívna grupa $(Act, 1, \times, \bar{\ })$

$$\frac{P \xrightarrow{a} P', Q \xrightarrow{b} Q'}{P \times Q \xrightarrow{a \times b} P' \times Q'}$$

Synchrónny kalkulus

komutatívna grupa $(Act, 1, \times, \bar{\ })$

$$\frac{P \xrightarrow{a} P', Q \xrightarrow{b} Q'}{P \times Q \xrightarrow{a \times b} P' \times Q'}$$

$\sigma X = X + 1.\sigma X$
$\sigma P = P + 1.\sigma P$

Synchrónny kalkulus

komutatívna grupa $(Act, 1, \times, \bar{\ })$

$$\frac{P \xrightarrow{a} P', Q \xrightarrow{b} Q'}{P \times Q \xrightarrow{a \times b} P' \times Q'}$$

$\sigma X = X + 1.\sigma X$
$\sigma P = P + 1.\sigma P$

chová sa ako P alebo môže odpočívať

Synchrónny kalkulus

komutatívna grupa $(Act, 1, \times, \bar{\ })$

$$\frac{P \xrightarrow{a} P', Q \xrightarrow{b} Q'}{P \times Q \xrightarrow{a \times b} P' \times Q'}$$

$\sigma X = X + 1.\sigma X$
$\sigma P = P + 1.\sigma P$

chová sa ako P alebo môže odpočívať

$P|Q = P \times \sigma Q + \sigma P \times Q$

Value-passing kalkulus

$$\bar{a}5.P|a(x).Q \xrightarrow{\tau} P|Q(5/x)$$

Value-passing kalkulus

$\bar{a}5.P|a(x).Q \xrightarrow{\tau} P|Q(5/x)$

$$\frac{}{a(x).P \xrightarrow{a(v)} P\{v/x\}}$$

Value-passing kalkulus

$\bar{a}5.P|a(x).Q \xrightarrow{\tau} P|Q(5/x)$

$$\frac{}{a(x).P \xrightarrow{a(v)} P\{v/x\}}$$

$$\frac{}{\bar{a}v.P \xrightarrow{\bar{a}v} P}$$

Value-passing kalkulus

$$\bar{a}5.P|a(x).Q \xrightarrow{\tau} P|Q(5/x)$$

$$\frac{}{a(x).P \xrightarrow{a(v)} P\{v/x\}}$$

$$\frac{}{\bar{a}v.P \xrightarrow{\bar{a}v} P}$$

$$\frac{P \xrightarrow{a(v)} P', Q \xrightarrow{\bar{a}v} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}$$

Posielanie iných hodnôt

Posielanie iných hodnôt

A Calculus of Mobile Processes

Posielanie iných hodnôt

A Calculus of Mobile Processes

π - calculus

Posielanie iných hodnôt

A Calculus of Mobile Processes
π - calculus
R. Milner, 1989

Posielanie iných hodnôt

A Calculus of Mobile Processes
π - calculus
R. Milner, 1989

Posielanie mien kanálov

Posielanie iných hodnôt

A Calculus of Mobile Processes
π - calculus
R. Milner, 1989

Posielanie mien kanálov

$P \equiv \bar{b}a.\bar{b}5.Nil$

Posielanie iných hodnôt

A Calculus of Mobile Processes
π - calculus
R. Milner, 1989

Posielanie mien kanálov

$P \equiv \bar{b}a.\bar{b}5.Nil$
$Q \equiv b(y).b(z).\bar{y}z.Nil$

Posielanie iných hodnôt

A Calculus of Mobile Processes
π - calculus
R. Milner, 1989

Posielanie mien kanálov

$P \equiv \bar{b}a.\bar{b}5.Nil$
$Q \equiv b(y).b(z).\bar{y}z.Nil$

$(P|Q) \xrightarrow{\tau}\xrightarrow{\tau} (Nil|\bar{a}5.Nil)$

Posielanie iných hodnôt

A Calculus of Mobile Processes
π - calculus
R. Milner, 1989

Posielanie mien kanálov

$P \equiv \bar{b}a.\bar{b}5.Nil$
$Q \equiv b(y).b(z).\bar{y}z.Nil$

$(P|Q) \xrightarrow{\tau}\xrightarrow{\tau} (Nil|\bar{a}5.Nil)$

Posielanie iných hodnôt

A Calculus of Mobile Processes
π - calculus
R. Milner, 1989

Posielanie mien kanálov

$P \equiv \bar{b}a.\bar{b}5.Nil$
$Q \equiv b(y).b(z).\bar{y}z.Nil$

$(P|Q) \xrightarrow{\tau}\xrightarrow{\tau} (Nil|\bar{a}5.Nil)$

Posielanie procesov

Iné druhy procesových algebier

Iné druhy procesových algebier

- čas

Iné druhy procesových algebier

- čas

- trvanie akcií, čas medzi ich vykonaním, timeout a pod.

Iné druhy procesových algebier

- čas

- trvanie akcií, čas medzi ich vykonaním, timeout a pod.

- pravdepodobnosť

Iné druhy procesových algebier

- čas

- trvanie akcií, čas medzi ich vykonaním, timeout a pod.

- pravdepodobnosť

- pravdepodobnosť medzi rovnakými akciami
$(a.Nil \oplus_{0.5} a.b.Nil + c.Nil)$

Iné druhy procesových algebier

- čas

- trvanie akcií, čas medzi ich vykonaním, timeout a pod.

- pravdepodobnosť

- pravdepodobnosť medzi rovnakými akciami
$(a.Nil \oplus_{0.5} a.b.Nil + c.Nil)$

- pravdepodobnosť medzi i rôznymi akciami akciami
$(a.Nil \oplus_{0.7} c.Nil)$

Iné druhy procesových algebier

- čas

- trvanie akcií, čas medzi ich vykonaním, timeout a pod.

- pravdepodobnosť

- pravdepodobnosť medzi rovnakými akciami
$(a.Nil \oplus_{0.5} a.b.Nil + c.Nil)$

- pravdepodobnosť medzi i rôznymi akciami akciami
$(a.Nil \oplus_{0.7} c.Nil)$

- priestor, distribúcia, konzumácia zdrojov, ...