

Modely konkurentných systémov

Formálne metódy tvorby softvéru

Damas Gruska

Katedra aplikovanej informatiky, I20, damas.gruska@gmail.com

Prednáška 1.

Organizácia kurzu

Organizácia kurzu

Prednášky nájdete na tejto stránke, najneskôr v deň, kedy sú v rozvrhu.

Organizácia kurzu

Prednášky nájdete na tejto stránke, najneskôr v deň, kedy sú v rozvrhu.

Budete dostávať domáce úlohy, ich odovzdanie je povinné v termíne do nasledovnej prednášky. Toleruje sa max jedna úloha odovzdaná po termíne. Riešenia mi posielajte ako jedno pdf-ko (ak nebude uvedené inak), kľudne to môže byť aj rukou písané **výlučne** na adresu damas.gruska@gmail.com.

Organizácia kurzu

Prednášky nájdete na tejto stránke, najneskôr v deň, kedy sú v rozvrhu.

Budete dostávať domáce úlohy, ich odovzdanie je povinné v termíne do nasledovnej prednášky. Toleruje sa max jedna úloha odovzdaná po termíne. Riešenia mi posielajte ako jedno pdf-ko (ak nebude uvedené inak), kľudne to môže byť aj rukou písané **výlučne** na adresu damas.gruska@gmail.com.

Cvičenia budú pre tých, ktorí mali problém s úlohou alebo si nie sú istí, či majú dobre vyriešenú úlohu. Budú sa konať po prednáške.

Organizácia kurzu

Prednášky nájdete na tejto stránke, najneskôr v deň, kedy sú v rozvrhu.

Budete dostávať domáce úlohy, ich odovzdanie je povinné v termíne do nasledovnej prednášky. Toleruje sa max jedna úloha odovzdaná po termíne. Riešenia mi posielajte ako jedno pdf-ko (ak nebude uvedené inak), kľudne to môže byť aj rukou písané **výlučne** na adresu damas.gruska@gmail.com.

Cvičenia budú pre tých, ktorí mali problém s úlohou alebo si nie sú istí, či majú dobre vyriešenú úlohu. Budú sa konať po prednáške.

Úlohy nebudem známkovať.

Organizácia kurzu

V prípade nápadnej podobnosti odovzdaných úloh, ďalšie budem hodnotiť známkou Fx.

Organizácia kurzu

V prípade nápadnej podobnosti odovzdaných úloh, ďalšie budem hodnotiť známku Fx.

Počas semestra budete písať dva testy. Prvý zhruba v polovici semestra a druhý na poslednej prednáške. Hodnotenie týchto testov bude základ pre hodnotenie kurzu. Ak s ním nebudete súhlasiť, môžete si známku opraviť. Kto testy z nejakých dôvodov nebude môcť písať, bude ich musieť dopísať dodatočne.

Organizácia kurzu

V prípade nápadnej podobnosti odovzdaných úloh, ďalšie budem hodnotiť známkou Fx.

Počas semestra budete písať dva testy. Prvý zhruba v polovici semestra a druhý na poslednej prednáške. Hodnotenie týchto testov bude základ pre hodnotenie kurzu. Ak s ním nebudete súhlasiť, môžete si známku opraviť. Kto testy z nejakých dôvodov nebude môcť písať, bude ich musieť dopísať dodatočne.

Samotné slidy nie sú určené na samoštúdium!!!

O čom bude reč:

Formálne metódy = na matematike založené techniky na špecifikáciu, vývoj a verifikáciu softvérových a hardvérových systémov.

O čom bude reč:

Formálne metódy = na matematike založené techniky na špecifikáciu, vývoj a verifikáciu softvérových a hardvérových systémov.

Dôraz na modely a metódy pre systémy konkurentné a paralelné.

O čom bude reč:

Formálne metódy = na matematike založené techniky na špecifikáciu, vývoj a verifikáciu softvérových a hardvérových systémov.

Dôraz na modely a metódy pre systémy konkurentné a paralelné.

Procesové algebry, Petriho siete, Časové automaty, logické formalizmy a model checking nástroje.

Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of Communicating Systems, skrátene CCS, 1980

Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of Communicating Systems, skrátene CCS, 1980

Milner R.: *Communication and concurrency*. Prentice-Hall International, New York, 1989.

Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of Communicating Systems, skrátene CCS, 1980

Milner R.: *Communication and concurrency*. Prentice-Hall International, New York, 1989.

J.A. Bergstra a J.W. Klop

Algebra of Communicating Processes, skrátene ACP, 1985

Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of Communicating Systems, skrátene CCS, 1980

Milner R.: *Communication and concurrency*. Prentice-Hall International, New York, 1989.

J.A. Bergstra a J.W. Klop

Algebra of Communicating Processes, skrátene ACP, 1985

Baeten J.A., W.P. Weijland: *Process Algebra*. Cambridge University Press, 1990.

Procesové algebry

C.A.R.Hoare

Communicating Sequential Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes*. Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

R. Milner

A Calculus of **Communicating** Systems, skrátene CCS, 1980

Milner R.: *Communication and concurrency*. Prentice-Hall International, New York, 1989.

J.A. Bergstra a J.W. Klop

Algebra of **Communicating** Processes, skrátene ACP, 1985

Baeten J.A., W.P. Weijland: *Process Algebra*. Cambridge University Press, 1990.

Ďalšie procesové algebry a na nich založené jazyky

Ambient calculus, 1998, L. Cardelli and A. D. Gordon

Ďalšie procesové algebry a na nich založené jazyky

Ambient calculus, 1998, L. Cardelli and A. D. Gordon

Pi-calculus, 1999, R. Milner, J. Parrow and D. Walker

Ďalšie procesové algebry a na nich založené jazyky

Ambient calculus, 1998, L. Cardelli and A. D. Gordon

Pi-calculus, 1999, R. Milner, J. Parrow and D. Walker

... časové, pravdepodobnostné, stochastické PA, iné komunikačné mechanizmy, lokality, ...

Ďalšie procesové algebry a na nich založené jazyky

Ambient calculus, 1998, L. Cardelli and A. D. Gordon

Pi-calculus, 1999, R. Milner, J. Parrow and D. Walker

... časové, pravdepodobnostné, stochastické PA, iné komunikačné mechanizmy, lokality, ...

Jazyky odvodené z procesových algebier alebo využívajúcich procesové algebry (či ich filozofiu) ako svoj základ:

- Wrightm (CSP,
- Timed Communicating Object Z (Object-Z a Timed CSP),
- Circus (CSP a Z),
- CspCASL(CSP),
- Ease (CSP),
- Occam (CSP),
- JCSP (CSP a Occam),
- C++CSP (CSP)

Petriho siete:

Petriho siete:

J.L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems.
Prentice Hall, 1981.

W. Reisig, A Primer in Petri Net Design. Springer-Verlag, 1992.

Petriho siete:

J.L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems.
Prentice Hall, 1981.

W. Reisig, A Primer in Petri Net Design. Springer-Verlag, 1992.

Časové automaty a UPPAAL

Petriho siete:

J.L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems.
Prentice Hall, 1981.

W. Reisig, A Primer in Petri Net Design. Springer-Verlag, 1992.

Časové automaty a UPPAAL

Logika:

Petriho siete:

J.L. Peterson, Petri Net Theory and the Modeling of Systems.
Prentice Hall, 1981.

W. Reisig, A Primer in Petri Net Design. Springer-Verlag, 1992.

Časové automaty a UPPAAL

Logika:

C. Stirling, Modal and Temporal Properties of Processes.
Springer-Verlag, 2001.

A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií
(mien, komunikačných kanálov, ...) A

A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií
(mien, komunikačných kanálov, ...) A

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií
(mien, komunikačných kanálov, ...) A

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií
(mien, komunikačných kanálov, ...) A

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Jedna interpretácia: \bar{a} znamená poslanie správy cez kanál a
(výstupná akcia) a a znamená prijatie správy cez kanál a (vstupná
akcia).

Daná množina atomických akcií
(mien, komunikačných kanálov, ...) A

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Jedna interpretácia: \bar{a} znamená poslanie správy cez kanál a (výstupná akcia) a a znamená prijatie správy cez kanál a (vstupná akcia).

Množina všetkých $Act = A \cup \bar{A} \cup \{\tau\}$ kde τ je špeciálna (interná) akcia nevyskytujúca sa v A .

A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií
(mien, komunikačných kanálov, ...) A

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Jedna interpretácia: \bar{a} znamená poslanie správy cez kanál a
(výstupná akcia) a a znamená prijatie správy cez kanál a (vstupná akcia).

Množina všetkých $Act = A \cup \bar{A} \cup \{\tau\}$ kde τ je špeciálna (interná) akcia nevyskytujúca sa v A .

Prvky z $A \cup \bar{A}$ budeme označovať a, b, c, \dots

A Calculus of Communicating Systems, CCS

Daná množina atomických akcií
(mien, komunikačných kanálov, ...) A

Ku každej akcii existuje komplementárna akcia $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Jedna interpretácia: \bar{a} znamená poslanie správy cez kanál a (výstupná akcia) a a znamená prijatie správy cez kanál a (vstupná akcia).

Množina všetkých $Act = A \cup \bar{A} \cup \{\tau\}$ kde τ je špeciálna (interná) akcia nevyskytujúca sa v A .

Prvky z $A \cup \bar{A}$ budeme označovať a, b, c, \dots

Prvky z Act budeme označovať x, y, z, \dots

Nil - proces, ktorý nerobí nič

Nil - proces, ktorý nerobí nič

a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

Nil - proces, ktorý nerobí nič

a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

b.a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

CCS, neformálny úvod

Nil - proces, ktorý nerobí nič

a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

b.a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

$b.a.Nil \xrightarrow{b} a.Nil \xrightarrow{a} Nil$

Nil - proces, ktorý nerobí nič

a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

b.a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

$b.a.Nil \xrightarrow{b} a.Nil \xrightarrow{a} Nil$

a.Nil + b.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil* alebo akciu *b* a potom sa správa ako proces *Nil*

Nil - proces, ktorý nerobí nič

a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

b.a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

$b.a.Nil \xrightarrow{b} a.Nil \xrightarrow{a} Nil$

a.Nil + b.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil* alebo akciu *b* a potom sa správa ako proces *Nil*

c.(a.Nil + b.Nil) - proces, ktorý vie urobiť akciu *c* a potom sa správa ako proces *(a.Nil + b.Nil)*

CCS, neformálny úvod

Nil - proces, ktorý nerobí nič

a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil*

b.a.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *b* a potom sa správa ako proces *a.Nil*

$b.a.Nil \xrightarrow{b} a.Nil \xrightarrow{a} Nil$

a.Nil + b.Nil - proces, ktorý vie urobiť akciu *a* a potom sa správa ako proces *Nil* alebo akciu *b* a potom sa správa ako proces *Nil*

c.(a.Nil + b.Nil) - proces, ktorý vie urobiť akciu *c* a potom sa správa ako proces *(a.Nil + b.Nil)*

$c.(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{c} a.Nil + b.Nil$

CCS, neformálny úvod

• $a.Nil$ $a;$ $\int a$

$b.a.Nil$ $\frac{b;}{a;}$ $\left\{ \begin{array}{l} b \\ a \end{array} \right.$

• $a.Nil + b.Nil$



$c.(a.Nil + b.Nil)$



CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$ - proces, ktorý vie urobiť buď akciu a a potom sa správa ako proces $Nil|b.Nil$ **alebo** akciu b a potom sa správa ako proces $a.Nil|Nil$

CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$ - proces, ktorý vie urobiť buď akciu a a potom sa správa ako proces $Nil|b.Nil$ **alebo** akciu b a potom sa správa ako proces $a.Nil|Nil$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{a} Nil|b.Nil \xrightarrow{b} Nil|Nil$$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{b} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$ - proces, ktorý vie urobiť buď akciu a a potom sa správa ako proces $Nil|b.Nil$ **alebo** akciu b a potom sa správa ako proces $a.Nil|Nil$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{a} Nil|b.Nil \xrightarrow{b} Nil|Nil$$
$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{b} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

$a.Nil|\bar{a}.Nil$ - proces, ktorý vie urobiť buď akciu a a potom sa správa ako proces $Nil|\bar{a}.Nil$ **alebo** akciu \bar{a} a potom sa správa ako proces $a.Nil|Nil$ **alebo** akciu τ a potom sa správa ako $Nil|Nil$

CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$ - proces, ktorý vie urobiť buď akciu a a potom sa správa ako proces $Nil|b.Nil$ **alebo** akciu b a potom sa správa ako proces $a.Nil|Nil$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{a} Nil|b.Nil \xrightarrow{b} Nil|Nil$$
$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{b} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

$a.Nil|\bar{a}.Nil$ - proces, ktorý vie urobiť buď akciu a a potom sa správa ako proces $Nil|\bar{a}.Nil$ **alebo** akciu \bar{a} a potom sa správa ako proces $a.Nil|Nil$ **alebo** akciu τ a potom sa správa ako $Nil|Nil$

τ predstavuje v tomto prípade internú komunikáciu cez kanál a

CCS, neformálny úvod

$a.Nil|b.Nil$ - proces, ktorý vie urobiť buď akciu a a potom sa správa ako proces $Nil|b.Nil$ **alebo** akciu b a potom sa správa ako proces $a.Nil|Nil$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{a} Nil|b.Nil \xrightarrow{b} Nil|Nil$$

$$a.Nil|b.Nil \xrightarrow{b} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

$a.Nil|\bar{a}.Nil$ - proces, ktorý vie urobiť buď akciu a a potom sa správa ako proces $Nil|\bar{a}.Nil$ **alebo** akciu \bar{a} a potom sa správa ako proces $a.Nil|Nil$ **alebo** akciu τ a potom sa správa ako $Nil|Nil$

τ predstavuje v tomto prípade internú komunikáciu cez kanál a

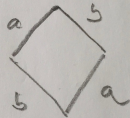
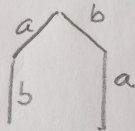
$$a.Nil|\bar{a}.Nil \xrightarrow{a} Nil|\bar{a}.Nil \xrightarrow{\bar{a}} Nil|Nil$$

$$a.Nil|\bar{a}.Nil \xrightarrow{\bar{a}} a.Nil|Nil \xrightarrow{a} Nil|Nil$$

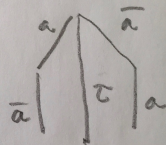
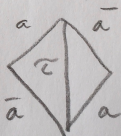
$$a.Nil|\bar{a}.Nil \xrightarrow{\tau} Nil|Nil$$

CCS, neformálny úvod

$a.Nil \mid b.Nil$



$a.Nil \mid \bar{a}.Nil$



A. Úlohy:

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a) $a.Nil$ a $a.Nil + a.Nil$?

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a) $a.Nil$ a $a.Nil + a.Nil$?

b) $a.b.Nil + a.c.Nil$ a $a.(b.Nil + c.Nil)$?

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a) $a.Nil$ a $a.Nil + a.Nil$?

b) $a.b.Nil + a.c.Nil$ a $a.(b.Nil + c.Nil)$?

c) $a.Nil|b.Nil$ a $a.b.Nil + b.a.Nil$?

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a) $a.Nil$ a $a.Nil + a.Nil$?

b) $a.b.Nil + a.c.Nil$ a $a.(b.Nil + c.Nil)$?

c) $a.Nil|b.Nil$ a $a.b.Nil + b.a.Nil$?

d) $a.Nil|a.Nil$ a $a.Nil$?

A. Úlohy:

1. aký je rozdiel medzi:

a) $a.Nil$ a $a.Nil + a.Nil$?

b) $a.b.Nil + a.c.Nil$ a $a.(b.Nil + c.Nil)$?

c) $a.Nil|b.Nil$ a $a.b.Nil + b.a.Nil$?

d) $a.Nil|a.Nil$ a $a.Nil$?

e) $a.Nil|a.Nil$ a $a.a.Nil + a.a.Nil$?

2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

a) raz tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

a) raz tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

b) tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

a) raz tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

b) tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

c) raz alebo tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia.

2. Napíšte proces, ktorý reprezentuje hodiny, ktoré vedia:

a) raz tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

b) tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia,

c) raz alebo tri razy tiknúť (akcia *tick*) a skončia.

3. Napíšte proces pozostávajúci z dvoch paralelne bežiacich procesov, kde jeden vie prijať niečo z kanálu *in* a pošle to do kanálu *send*. Druhý vie prijať niečo z kanálu *send* a poslať to na kanál *out*.

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{a} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{b} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{a} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{b} Nil$$

$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\}$ vie urobiť len akciu b - akcia a je zakázaná

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{a} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{b} Nil$$

$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\}$ vie urobiť len akciu b - akcia a je zakázaná

$$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\} \xrightarrow{b} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{a} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \xrightarrow{b} Nil$$

$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\}$ vie urobiť len akciu b - akcia a je zakázaná

$$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\} \xrightarrow{b} Nil$$

$$(a.Nil + b.Nil) \setminus \{a\} \not\xrightarrow{a}$$

Použitie:

nech $P = a.Nil$, $Q = \bar{a}.Nil$ - v procese $P|Q$ môže P komunikovať s Q cez kanál a ale nemusí - cez tento kanál môže procesu P poslať správu aj niekto iný.

Použitie:

nech $P = a.Nil$, $Q = \bar{a}.Nil$ - v procese $P|Q$ môže P komunikovať s Q cez kanál a ale nemusí - cez tento kanál môže procesu P poslať správu aj niekto iný.

$$(P|Q) \setminus \{a\} \xrightarrow{\tau} Nil|Nil$$

Použitie:

nech $P = a.Nil$, $Q = \bar{a}.Nil$ - v procese $P|Q$ môže P komunikovať s Q cez kanál a ale nemusí - cez tento kanál môže procesu P poslať správu aj niekto iný.

$$(P|Q) \setminus \{a\} \xrightarrow{\tau} Nil|Nil$$

$$(P|Q) \setminus \{a\} \not\xrightarrow{a}$$

Zatiaľ máme len konečné procesy.

Zatiaľ máme len konečné procesy.

Clock = tick.Clock

Zatiaľ máme len konečné procesy.

$Clock = tick.Clock$

Nekonečný proces ako riešenie rovnice $X = tick.X$

Zatiaľ máme len konečné procesy.

$Clock = tick.Clock$

Nekonečný proces ako riešenie rovnice $X = tick.X$

Budeme ho značiť ako $\mu X tick.X$

Zatiaľ máme len konečné procesy.

$Clock = tick.Clock$

Nekonečný proces ako riešenie rovnice $X = tick.X$

Budeme ho značiť ako $\mu X tick.X$

B. Úloha:

a) napíšte proces reprezentujúci hodiny, ktoré idú bezchybne alebo raz tiknú naposledy.

Zatiaľ máme len konečné procesy.

$Clock = tick.Clock$

Nekonečný proces ako riešenie rovnice $X = tick.X$

Budeme ho značiť ako $\mu X tick.X$

B. Úloha:

a) napíšte proces reprezentujúci hodiny, ktoré idú bezchybne alebo raz tiknú naposledy.

b) napíšte systém pozostávajúci z procesu K a hodín, ktoré môžu ísť bezchybne alebo im proces K pošle signál na zastavenie. Pričom nikto iný im takýto signál nemôže poslať.

Dané *Act* a procesové premenné X, Y, Z, \dots

Dané *Act* a procesové premenné X, Y, Z, \dots

Množina CCS termov:

$P ::=$	Nil	prázdny proces
	X	procesová premenná
	$x.P$	$x \in Act$ operácia prefixu
	$P + Q$	nedeterministický výber P alebo Q
	$P Q$	paralelná kompozícia
	$P \setminus L$	reštrikcia $L \subseteq A$
	$P[f]$	premenovanie funkciou $f : A \rightarrow A$
	$\mu X P$	rekurzia X je procesová premenná

Dané *Act* a procesové premenné X, Y, Z, \dots

Množina CCS termov:

$P ::=$	Nil	prázdny proces
	X	procesová premenná
	$x.P$	$x \in Act$ operácia prefixu
	$P + Q$	nedeterministický výber P alebo Q
	$P Q$	paralelná kompozícia
	$P \setminus L$	reštrikcia $L \subseteq A$
	$P[f]$	premenovanie funkciou $f : A \rightarrow A$
	$\mu X P$	rekurzia X je procesová premenná

Premonovávacia funkcia: $f : Act \rightarrow Act$ taká, že
 $f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$, $f(\tau) = \tau$.

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P | b.Q \setminus L$ znamená $R + ((a.P)) | (b.(Q \setminus L))$

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P | b.Q \setminus L$ znamená $R + ((a.P)) | (b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P | b.Q \setminus L$ znamená $R + ((a.P)) | (b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je μX .

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P | b.Q \setminus L$ znamená $R + ((a.P)) | (b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je μX .

Príklad:

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P|b.Q \setminus L$ znamená $R + ((a.P))|(b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je μX .

Príklad:

$a.X, b.X|b.Nil$ - otvorené termy

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P|b.Q \setminus L$ znamená $R + ((a.P))|(b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je μX .

Príklad:

$a.X, b.X|b.Nil$ - otvorené termy

$\mu X a.X, \mu X (b.X|b.Nil)$ uzavrené termy - t.j. procesy

Zátvorkovanie - konvencia: silnejšie viažu reštrikcia, premenovanie, prefix, paralelná kompozícia a sumácia

$R + a.P|b.Q \setminus L$ znamená $R + ((a.P))|(b.(Q \setminus L))$

Monožina CCS procesov - uzavrené CCS termy (budeme ju značiť CCS).

Uzáverový operátor je μX .

Príklad:

$a.X, b.X|b.Nil$ - otvorené termy

$\mu X a.X, \mu X (b.X|b.Nil)$ uzavrené termy - t.j. procesy

$\mu Y a.X$ - otvorený term

Značkový prechodový systém je trojica $(S, \rightarrow, \Lambda)$ kde S je množina stavov, Λ je množina značiek a $\rightarrow \subseteq S \times \Lambda \times S$.

Značkové prechodové systémy

Značkový prechodový systém je trojica $(S, \rightarrow, \Lambda)$ kde S je množina stavov, Λ je množina značiek a $\rightarrow \subseteq S \times \Lambda \times S$.

Ak $p, q \in S$ a $\alpha \in \Lambda$ tak miesto $(p, \alpha, q) \in \rightarrow$ budeme písať $p \xrightarrow{\alpha} q$.

Značkový prechodový systém je trojica $(S, \rightarrow, \Lambda)$ kde S je množina stavov, Λ je množina značiek a $\rightarrow \subseteq S \times \Lambda \times S$.

Ak $p, q \in S$ a $\alpha \in \Lambda$ tak miesto $(p, \alpha, q) \in \rightarrow$ budeme písať $p \xrightarrow{\alpha} q$.

Príklady množiny značiek: inštrukcie programu, vstupy alebo výstupy, množina odpálených prechodov pri Petriho sietiach, splnené podmienky, plynutie času atď.

Značkový prechodový systém je trojica $(S, \rightarrow, \Lambda)$ kde S je množina stavov, Λ je množina značiek a $\rightarrow \subseteq S \times \Lambda \times S$.

Ak $p, q \in S$ a $\alpha \in \Lambda$ tak miesto $(p, \alpha, q) \in \rightarrow$ budeme písať $p \xrightarrow{\alpha} q$.

Príklady množiny značiek: inštrukcie programu, vstupy alebo výstupy, množina odpálených prechodov pri Petriho sietiach, splnené podmienky, plynutie času atď.

Vlastnosti: nástroj pre definovanie operačnej sémantiky iných modelov, veľmi jednoduchý, neobsahuje žiadne konštruktory, priama súvislosť s Kripkeho štruktúrou

Značkový prechodový systém

Značkový prechodový systém

Množina stavov - množina procesov CCS

Značkový prechodový systém

Množina stavov - množina procesov CCS

Množina značiek - *Act*

Značkový prechodový systém

Množina stavov - množina procesov CCS

Množina značiek - Act

Ostáva definovať množinu $\rightarrow \subseteq CCS \times Act \times CCS$

$$\frac{}{x.P \xrightarrow{x} P}$$

$$\frac{P \xrightarrow{x} P'}{P + Q \xrightarrow{x} P', Q + P \xrightarrow{x} P'}$$

$$\frac{P \xrightarrow{u} P'}{P | Q \xrightarrow{u} P' | Q, Q | P \xrightarrow{u} Q | P'}$$

$$\frac{P \xrightarrow{a} P', Q \xrightarrow{\bar{a}} Q'}{P | Q \xrightarrow{\tau} P' | Q'}$$

$$\frac{P \xrightarrow{x} P'}{P \setminus L \xrightarrow{x} P' \setminus L}, (x, \bar{x} \notin L)$$

$$\frac{P \xrightarrow{x} P'}{P[f] \xrightarrow{f(x)} P'[f]}$$

$$\frac{P[\mu XP/X] \xrightarrow{x} P'}{\mu XP \xrightarrow{x} P'}$$

$$\begin{aligned} a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) &\xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ &\xrightarrow{b} c.Nil \xrightarrow{c} Nil \end{aligned}$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{b} c.Nil \xrightarrow{c} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{d} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{b} c.Nil \xrightarrow{c} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{d} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{c} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{b} c.Nil \xrightarrow{c} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{d} Nil$$

$$a.(b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \xrightarrow{a} (b.c.Nil + c.(d.Nil + c.Nil)) \\ \xrightarrow{c} (d.Nil + c.Nil) \xrightarrow{c} Nil$$

$$\mu X a.X \xrightarrow{a} \mu X a.X \xrightarrow{a} \mu X a.X \xrightarrow{a} \dots$$

Strom odvodenia pre proces P - značený orientovaný graf s vrcholom P

Strom odvodenia pre proces P - značený orientovaný graf s vrcholom P

hrana označená x vedie z R do Q ak $R \xrightarrow{x} Q$.

Strom odvodenia pre proces P - značený orientovaný graf s vrcholom P

hrana označená x vedie z R do Q ak $R \xrightarrow{x} Q$.

Úloha

Napíšte stromy odvodenia pre procesy:

1. $(a.(b.Nil + c.Nil))$
2. $(a.(b.Nil|c.Nil))$
3. $(a.(b.Nil + c.Nil) \setminus \{b\})$
4. $(a.(b.Nil|\bar{b}.Nil))$
5. $(a.(b.Nil|\bar{b}.Nil) \setminus \{b\})$
6. $\mu X(a.X + b.X + c.Nil)$
7. $\mu X(X|a.Nil)$

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:
vie prijať mincu (akcia coin)

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:
vie prijať mincu (akcia coin)
dá sa na ňom stlačiť tlačitko tea alebo coffee

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:
vie prijať mincu (akcia coin)
dá sa na ňom stlačiť tlačítko tea alebo coffee
vydá tea alebo coffee

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:
vie prijať mincu (akcia coin)
dá sa na ňom stlačiť tlačítka tea alebo coffee
vydá tea alebo coffee
Napíšte používateľa, ktorý si vyberá medzi tea a coffee a takého,
čo pije len kávu.

1. Napíšte procesy popisujúce automat na predaj napojov:
vie prijať mincu (akcia coin)
dá sa na ňom stlačiť tlačítka tea alebo coffee
vydá tea alebo coffee
Napíšte používateľa, ktorý si vyberá medzi tea a coffee a takého,
čo pije len kávu.

2. Napíšte strom odvoduena priecestie.

2. Napíšte strom odvodu priecestie.
pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály

2. Napíšte strom odvodu priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály
akcie:

auto, vlak - blíži sa auto, vlak

2. Napíšte strom odvedenia priecestie.

pozostáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály
akcie:

auto, vlak - blíži sa auto, vlak

hore, dolu - pohyb rámp

2. Napíšte strom odvedenia priecestie.

pozostáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály
akcie:

auto, vlak - blíži sa auto, vlak

hore, dolu - pohyb rámp

akrizuje, vkrizuje - auto, vlak križuje priecestie

2. Napíšte strom odvodu priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály
akcie:

auto, vlak - blíži sa auto, vlak

hore, dolu - pohyb rámp

akrizuje, vkrizuje - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

2. Napíšte strom odvodu priecestie.

pozostáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály
akcie:

auto, vlak - blíži sa auto, vlak

hore, dolu - pohyb rámp

akrizuje, vkrizuje - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

$Cesta = auto.\overline{hore}.\overline{akrizuje}.\overline{dole}.Cesta$

2. Napíšte strom odvodu priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály
akcie:

auto, vlak - blíži sa auto, vlak

hore, dolu - pohyb rámp

akrizuje, vkrizuje - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

Cesta = auto.hore.akrizuje.dole.Cesta

Zeleznica = vlak.zelena.vkrizuje.cervena.Zeleznica

2. Napíšte strom odvedenia priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály
akcie:

auto, vlak - blíži sa auto, vlak

hore, dolu - pohyb rámp

akrizuje, vkrizuje - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

Cesta = auto.hore.akrizuje.dole.Cesta

Zeleznica = vlak.zelena.vkrizuje.cervena.Zeleznica

Signaly = zelna.cervena.Signaly + hore.dole.Signaly

2. Napíšte strom odvedenia priecestie.

pozastáva z troch procesov: Cesta, Zeleznica, Signály
akcie:

auto, vlak - blíži sa auto, vlak

hore, dolu - pohyb rámp

akrizuje, vkrizuje - auto, vlak križuje priecestie

závory sú stále dole, až kým sa neblíži auto

$Cesta = auto.\overline{hore}.\overline{akrizuje}.\overline{dole}.Cesta$

$Zeleznica = vlak.\overline{zelena}.\overline{vkrizuje}.\overline{cervena}.Zeleznica$

$Signaly = zelna.\overline{cervena}.Signaly + hore.\overline{dole}.Signaly$

$Priecestie \equiv$

$(Cesta|Zeleznica|Signaly) \setminus \{zelena, cervena, hore, dole\}$

a.Nil + a.Nil vs. a.Nil

Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$ vs. $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$ vs. Nil

Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$ vs. $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$ vs. Nil

$a.(b.Nil + c.Nil)$ vs. $a.b.Nil + a.c.Nil$

Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$ vs. $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$ vs. Nil

$a.(b.Nil + c.Nil)$ vs. $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$ vs. $a.Nil|b.Nil$

Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$ vs. $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$ vs. Nil

$a.(b.Nil + c.Nil)$ vs. $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$ vs. $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$ vs. $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$ vs. Nil

$a.(b.Nil + c.Nil)$ vs. $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$ vs. $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

- pozorovateľ nevidí syntax (to jest popis procesu)

Ekvivalencie

$a.Nil + a.Nil$ vs. $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$ vs. Nil

$a.(b.Nil + c.Nil)$ vs. $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$ vs. $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

- pozorovateľ nevidí syntax (to je popis procesu)
- black box scénár

$a.Nil + a.Nil$ vs. $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$ vs. Nil

$a.(b.Nil + c.Nil)$ vs. $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$ vs. $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

- pozorovateľ nevidí syntax (to je popis procesu)
- black box scénár
- ak nevie rozlíšiť medzi dvoma procesmi, tak ich považuje za ekvivalentné

$a.Nil + a.Nil$ vs. $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$ vs. Nil

$a.(b.Nil + c.Nil)$ vs. $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$ vs. $a.Nil|b.Nil$

Porovnanie procesov:

- pozorovateľ nevidí syntax (to je popis procesu)
- black box scénár
- ak nevie rozlíšiť medzi dvoma procesmi, tak ich považuje za ekvivalentné
- rôzne možnosti pozorovateľa vedú k rôznym ekvivalenciám medzi procesmi

Dva procesy sa správajú **rovnako**, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú **rovnako**.

Dva procesy sa správajú **rovnako**, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú **rovnako**.

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je (silná) bisimulácia, ak $(P, Q) \in S$ implikuje

- 1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
- 2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Dva procesy sa správajú **rovnako**, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú **rovnako**.

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je (silná) bisimulácia, ak $(P, Q) \in S$ implikuje

- 1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
- 2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Poznámka - aj prázdna relácia je bisimulácia.

Dva procesy sa správajú **rovnako**, ak to, čo vie urobiť jeden vie urobiť aj druhý a výsledné procesy sa opäť správajú **rovnako**.

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je (silná) bisimulácia, ak $(P, Q) \in S$ implikuje

- 1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in S$
- 2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in S$

Poznámka - aj prázdna relácia je bisimulácia.

Úloha: napíšte, ak existuje, bisimuláciu obsahujúcu dvojice

$a.Nil + a.Nil$ a $a.Nil$

$(a.Nil) \setminus \{a\}$ a Nil

$a.(b.Nil + c.Nil)$ a $a.b.Nil + a.c.Nil$

$a.b.Nil + b.a.Nil$ a $a.Nil|b.Nil$

Označenie:

Označenie:

$$S^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in S\}$$

$$S_1 S_2 = \{(x, z) \mid \exists y, (x, y) \in S_1, (y, z) \in S_2\}$$

$$I_d - \text{identická relácia t.j. } I_d = \{(x, x) \mid \forall x\}$$

Označenie:

$$S^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in S\}$$

$$S_1 S_2 = \{(x, z) | \exists y, (x, y) \in S_1, (y, z) \in S_2\}$$

$$I_d - \text{identická relácia t.j. } I_d = \{(x, x) | \forall x\}$$

Theorem

Nech S_1, S_2 sú silné bisimulácie. Potom aj nasledovné relácie sú silné bisimulácie

- 1) I_d
- 2) S^{-1}
- 3) $S_1 S_2$
- 4) $S_1 \cup S_2$

Označenie:

$$S^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in S\}$$

$$S_1 S_2 = \{(x, z) | \exists y, (x, y) \in S_1, (y, z) \in S_2\}$$

$$I_d - \text{identická relácia t.j. } I_d = \{(x, x) | \forall x\}$$

Theorem

Nech S_1, S_2 sú silné bisimulácie. Potom aj nasledovné relácie sú silné bisimulácie

- 1) I_d
- 2) S^{-1}
- 3) $S_1 S_2$
- 4) $S_1 \cup S_2$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Definition

Procesy P a Q sú silne bisimulárne ($P \sim Q$) ak $(P, Q) \in S$ pre nejakú silnú bisimuláciu S .

Ekvivalentná formulácia:

$\sim = \bigcup \{ S \mid S \text{ je silná bisimulácia} \}$

Definition

Procesy P a Q sú silne bisimulárne ($P \sim Q$) ak $(P, Q) \in S$ pre nejakú silnú bisimuláciu S .

Ekvivalentná formulácia:

$$\sim = \bigcup \{ S \mid S \text{ je silná bisimulácia} \}$$

Theorem

\sim je najväčšia silná bisimulácia

\sim je ekvivalencia

Definition

Procesy P a Q sú silne bisimulárne ($P \sim Q$) ak $(P, Q) \in S$ pre nejakú silnú bisimuláciu S .

Ekvivalentná formulácia:

$$\sim = \bigcup \{ S \mid S \text{ je silná bisimulácia} \}$$

Theorem

\sim je najväčšia silná bisimulácia

\sim je ekvivalencia

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

$P \sim Q$ iff $\forall x \in Act$

- 1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $P' \sim Q'$
- 2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $P' \sim Q'$

Theorem

$P \sim Q$ iff $\forall x \in Act$

- 1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $P' \sim Q'$
- 2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $P' \sim Q'$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Theorem

$P \sim Q$ iff $\forall x \in Act$

- 1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $P' \sim Q'$
- 2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $P' \sim Q'$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Definition

Binárna relácia $S \subseteq CCS \times CCS$ je silná bisimulácia až na \sim , ak $(P, Q) \in S$ implikuje

- 1) ak $P \xrightarrow{x} P'$ tak existuje Q' také, že $Q \xrightarrow{x} Q'$ a platí $(P', Q') \in \sim S \sim$
- 2) ak $Q \xrightarrow{x} Q'$ tak existuje P' také, že $P \xrightarrow{x} P'$ a platí $(P', Q') \in \sim S \sim$