

## Definition

Binárna relácia  $S \subseteq CCS \times CCS$  je (silná) bisimulácia, ak  $(P, Q) \in S$  implikuje

- 1) ak  $P \xrightarrow{x} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{x} Q'$  a platí  $(P', Q') \in S$
- 2) ak  $Q \xrightarrow{x} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{x} P'$  a platí  $(P', Q') \in S$

## Definition

Procesy  $P$  a  $Q$  sú silne bisimulárne ( $P \sim Q$ ) ak  $(P, Q) \in S$  pre nejakú silnú bisimuláciu  $S$ .

Ekvivalentná formulácia:

$$\sim = \bigcup \{ S \mid S \text{ je silná bisimulácia} \}$$

## Definition

Definujme  $f : CCS \times CCS \rightarrow CCS \times CCS$ : ak

$R \subseteq CCS \times CCS$  tak  $(P, Q) \in f(R)$  iff (if and only if) pre každé  $x \in Act$  platí

- 1) ak  $P \xrightarrow{x} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{x} Q'$  a platí  $(P', Q') \in R$
- 2) ak  $Q \xrightarrow{x} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{x} P'$  a platí  $(P', Q') \in R$

## Theorem

1.  $\sim$  je najväčší pevný bod  $f$ , t.j.  $\sim = f(\sim)$ ,

## Theorem

$P \sim Q$  iff  $\mathcal{A}_1 \vdash P = Q$ .

## Theorem

$P \sim Q$  iff pre každé  $\phi, \phi \in \mathcal{P}\mathcal{L}$ ,  $P \models \phi \Leftrightarrow Q \models \phi$ .

Dva procesy sú stopovo ekvivalentné ( $\sim_{trace}$ ) ak majú rovnaké stopy (stopa/trace procesu je postupnosť akcií, ktorú vie vykonať).

$$Tr(P) = \{s \mid s \in Act^* \text{ také, že } P \xrightarrow{s}\}$$

$$Tr(Nil) = \{\epsilon\}$$

$$Tr(a.(b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$$

## Definition

$$P \sim_{trace} Q \text{ iff } Tr(P) = Tr(Q)$$

$$a.(b.Nil + c.Nil) \sim_{trace} a.b.Nil + a.c.Nil$$

$$a.(b.Nil + c.Nil) + a.b.Nil \sim_{trace} a.b.Nil + a.c.Nil$$

$$a.(b.Nil + c.Nil) + a.Nil \sim_{trace} a.b.Nil + a.c.Nil$$

## Theorem

$\sim_{trace}$  je ekvivalencia.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Theorem

$$\begin{aligned}P + Q &\sim_{trace} Q + P \\P + (Q + R) &\sim_{trace} (P + Q) + R \\P + P &\sim_{trace} P \\P + Nil &\sim_{trace} P \\x.(P + Q) &\sim_{trace} x.P + x.Q\end{aligned}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Theorem

$$\sim \subset \sim_{trace}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Theorem

Nech  $P_1 \sim_{trace} P_2$ . Potom

$$\begin{array}{lcl} x.P_1 & \sim_{trace} & x.P_2 \\ P_1 + Q & \sim_{trace} & P_2 + Q \\ P_1|Q & \sim_{trace} & P_2|Q \\ P_1 \setminus L & \sim_{trace} & P_2 \setminus L \\ P_1[f] & \sim_{trace} & P_2[f] \end{array}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Definition

-  $P \sim_0 Q$  pre každé  $P, Q$  ( $\sim_0 = \text{CCS} \times \text{CCS}$ )

-  $P \sim_{k+1} Q$  ak  $\forall s, s \in \text{Act}^*$

1) ak  $P \xrightarrow{s} P'$  tak existuje  $Q'$  také, že  $Q \xrightarrow{s} Q'$  a platí  $P' \sim_k Q'$

2) ak  $Q \xrightarrow{s} Q'$  tak existuje  $P'$  také, že  $P \xrightarrow{s} P'$  a platí  $P' \sim_k Q'$

Pozorovanie -  $\sim_1 = \sim_{\text{trace}}$ .

## Definition

Proces je konečný ak neobsahuje rekurziu. Proces je sériový, ak neobsahuje operátory  $|$ ,  $\backslash$ ,  $[f]$ .

Každý konečný proces je stopovo ekvivalentný nejakému konečnému sériovému procesu.

V ďalšom sa budeme zaoberať len konečnými sériovými procesmi.



## Definition

$P$  je v stopovej forme ak  $P \equiv \sum_{i=1}^n s_i.Nil$  kde každé  $s_i \in Tr(P)$ .

$$a.(a.Nil + b.Nil)$$

$$Nil + a.Nil + a.a.Nil + a.b.Nil$$

$\mathcal{A}_3$ :

$$P + Q = Q + P \quad A1$$

$$P + (Q + R) = (Q + P) + R \quad A2$$

$$P + P = P \quad A3$$

$$P + Nil = P \quad A4$$

$$x.(P + Q) = x.P + x.Q \quad A8$$

## Theorem

Pre každé  $P$  existuje  $P'$  v stopovej forme, také že  $\mathcal{A}_3 \vdash P = P'$ .

Dôkaz.

Vieme, že pre každé  $Q$  existuje  $Q'$  v štandardnej forme, také že  $\mathcal{A}_1 \vdash Q = Q'$ .

Môžeme teda predpokladať, že  $P$  je v štandardnej forme, t.j.  $P \equiv \sum_{i=1}^n x_i \cdot P_i$  kde každé  $P_i$  je opäť v štandardnej forme.

Potom pre každé  $P_i \equiv \sum_{j=1}^m x'_j \cdot P'_j$  máme:

$$\mathcal{A}_3 \vdash x_i \cdot \sum_{j=1}^m x'_j \cdot P'_j = \sum_{j=1}^m x_i \cdot x'_j \cdot P'_j.$$

## Theorem

$P \sim_{trace} Q$  iff  $\mathcal{A}_3 \vdash P = Q$ .

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Theorem

$P \sim_{trace} Q$  iff pre každé  $\phi, \phi \equiv \langle s \rangle tt$ ,  $P \models \phi \Leftrightarrow Q \models \phi$ .

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

# Slabá stopová ekvivalencia

Dva procesy sú slabo stopovo ekvivalentné ( $\approx_{trace}$ ) ak majú rovnaké viditeľné stopy (viditeľná stopa/trace procesu je postupnosť akcií rôznych od  $\tau$ , ktorú vie vykonať vzhľadom na reláciu  $\Rightarrow$ ).

$$Tr_w(P) = \{s \mid s \in A^* \text{ také, že } P \xRightarrow{s}\}$$

$$Tr_w(\tau.Nil) = \{\epsilon\}$$

$$Tr_w(a.\tau.(b.Nil + c.Nil)) = \{\epsilon, a, ab, ac\}$$

## Definition

$$P \approx_{trace} Q \text{ iff } Tr_w(P) = Tr_w(Q)$$

$$a.\tau.(b.Nil + c.Nil) \approx_{trace} a.b.\tau.Nil + \tau.a.c.Nil$$

$$a.(b.Nil + c.Nil) + a.b.Nil \approx_{trace} a.b.Nil + \tau.Nil + \tau.a.c.Nil$$

$$a.(b.Nil + c.Nil) + a.\tau.\tau.Nil \approx_{trace}$$

$$a.\tau.b.Nil + \tau.a.c.Nil + \tau.\tau.\tau.\tau.a.c.\tau.Nil$$

## Theorem

$\approx_{trace}$  je ekvivalencia.

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Theorem

$$\begin{aligned}x.(P + Q) &\approx_{trace} x.P + x.Q \\(P + Q)|R &\approx_{trace} (P|R) + (Q|R) \\P &\approx_{trace} \tau.P\end{aligned}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Theorem

$\approx_C \approx_{trace}$ .

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

## Theorem

Nech  $P_1 \approx_{trace} P_2$ . Potom

$$\begin{array}{lcl} x.P_1 & \approx_{trace} & x.P_2 \\ P_1 + Q & \approx_{trace} & P_2 + Q \\ P_1|Q & \approx_{trace} & P_2|Q \\ P_1 \setminus L & \approx_{trace} & P_2 \setminus L \\ P_1[f] & \approx_{trace} & P_2[f] \end{array}$$

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.



## Definition

Neúspech je dvojica  $(s, L)$  kde  $s \in A^*$ ,  $L \subseteq A$ .

Neúspech  $(s, L)$  patrí procesu  $P$  ak existuje  $P'$ , taký, že

(i)  $P \xrightarrow{s} P'$ ,

(ii)  $P' \not\rightarrow$ ,

(ii)  $\forall a, a \in L, P' \not\rightarrow$ .

Nech  $a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$

Neúspechy tohoto procesu sú:

$(\epsilon, L)$  pre každé  $L$  také, že  $a \notin L$

$(a, L)$  pre každé  $L$  také, že  $b \notin L$

$(a.b, L)$  pre každé  $L$  také, že  $\{c, d\} \not\subseteq L$

$(a.b.c, L), (a.b.d, L)$  pre každé  $L$

## Definition

Procesy  $P$  a  $Q$  sú ekvivalentné vzhľadom na neúspech, ( $P \approx_f Q$ ) ak majú rovnaké neúspechy.

## Theorem

$\approx_f \subset \approx_{trace}$ .

Úloha: dokážte predchádzajúcu vetu.

Rovnosť neplatí:

$$P \equiv a.(b.Nil + c.Nil)$$

$$Q \equiv a.b.Nil + a.c.Nil$$

$$P \approx_{trace} Q \text{ ale } P \not\approx_f Q$$

$(a, \{b\})$  je neúspech len procesu  $Q$ .

$$P \equiv a.(b.c.Nil + b.d.Nil)$$

$$Q \equiv a.b.c.Nil + a.b.d.Nil$$

$$P \approx_f Q \text{ ale } P \not\approx Q$$

$$P \equiv \mu X \tau.X$$

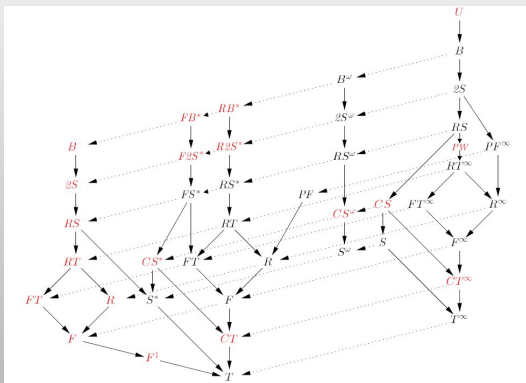
$$Q \equiv \mu X \tau.X + \tau.Nil$$

$$P \not\approx_f Q \text{ ale } P \approx Q$$

## Theorem

$$x.(y.P + z.Q) \approx_f x.y.P + x.z.Q.$$

# Inékvivalencie



# Iné ekvivalencie

	<i>B</i>	<i>RS</i>	<i>PW</i>	<i>RT</i>	<i>FT</i>	<i>R</i>	<i>F</i>	<i>CS</i>	<i>CT</i>	<i>S</i>	<i>T</i>
$(x + y) + z = x + (y + z)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x + y = y + x$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x + 0 = x$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$x + x = x$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$ax \sqsubseteq ax + ay$			+	+	+	+	+	v	v	v	v
$a(bx + by + z) = a(bx + z) + a(by + z)$			+	v	v	v	v	v	v	v	v
$I(x) = I(y) \Rightarrow ax + ay = a(x + y)$				+	v	v	v	v	v	v	v
$ax + ay \supseteq a(x + y)$					+		v	v	v	v	v
$a(bx + u) + a(by + v) \supseteq a(bx + by + u)$						+	v	v	v	v	v
$ax + a(y + z) \supseteq a(x + y)$							+	v	v	v	v
$ax \sqsubseteq ax + y$								+	+	v	v
$a(bx + u) + a(cy + v) = a(bx + cy + u + v)$									+	v	v
$x \sqsubseteq x + y$										+	+
$ax + ay = a(x + y)$											+
$I(0) = 0$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$I(ax) = a0$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
$I(x + y) = I(x) + I(y)$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

J.A. Bergstra a J.W. Klop

Algebra of Communicating Processes, skrátene ACP, 1985

Baeten J.A., W.P. Weijland: *Process Algebra*. Cambridge University Press, 1990.

$A$  - množina atomických akcií

$\gamma : A \times A \rightarrow A$  čiastočná funkcia taká, že

$$\gamma(a, b) = \gamma(b, a)$$

$$\gamma(a, \gamma(b, c)) = \gamma(\gamma(a, b), c)$$

Ak je  $\gamma(a, b)$  definované, tak budeme písať  $\gamma(a, b) \downarrow$  t.j.

$$\gamma(a, b) = c.$$

Slovom  $a$  a  $b$  komunikujú.

Konštanta:

*Nil*

Unárne operácie:

$$\delta_H \text{ pre } H \subseteq A$$

Binárne operácie:

$$+, \cdot, ||, ||, |$$

$$P + Q = Q + P$$

$$P + (Q + R) = (P + Q) + R$$

$$P + P = P$$

$$(P + Q).R = P.R + Q.R$$

$$(P.Q).R = P.(R.Q)$$

$$P + Nil = P$$

$$Nil.P = Nil$$

$$a|b = \gamma(a, b) \text{ ak } \gamma(a, b) \downarrow$$

$$a|b = Nil \text{ inak}$$



$$P \parallel Q = P \downarrow Q + Q \downarrow P + P|Q$$

$$a \downarrow P = a.P$$

$$a.P \downarrow Q = a.(P \parallel Q)$$

$$(P + Q) \downarrow R = P \downarrow R + Q \downarrow R$$

$$a|b.P = (a|b).P$$

$$a.P|b.Q = (a|b).(P \parallel Q)$$

$$(P + Q)|R = P|R + Q|R$$

$$R|(P + Q) = R|P + R|Q$$

$$\delta_H(a) = a \text{ ak } a \notin H$$

$$\delta_H(a) = Nil \text{ ak } a \in H$$

$$\delta_H(P + Q) = \delta_H(P) + \delta_H(Q)$$

$$\delta_H(P.Q) = \delta_H(P).\delta_H(Q)$$

C.A.R.Hoare

**Communicating Sequential** Processes, skrátene CSP, 1978

Hoare C. A. R.: *Communicating sequential processes.*

Prentice-Hall International Series In Computer Science, 1985.

$P \parallel_H Q$  pre  $H \subseteq A$

$$\frac{P \xrightarrow{a} P', Q \xrightarrow{a} Q', a \in H}{P \parallel_H Q \xrightarrow{a} P' \parallel_H Q'}$$

komutatívna grupa  $(Act, 1, \times, ^-)$

$$\frac{P \xrightarrow{a} P', Q \xrightarrow{b} Q'}{P \times Q \xrightarrow{a \times b} P' \times Q'}$$

$$\sigma X = X + 1.\sigma X$$

$$\sigma P = P + 1.\sigma P$$

chová sa ako  $P$  alebo môže "odpočívať"

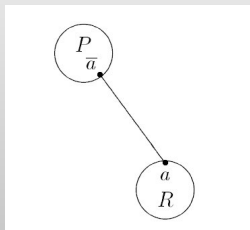
$$P|Q = P \times \sigma Q + \sigma P \times Q$$

$$\bar{a}5.P|a(x).Q \xrightarrow{\tau} P|Q(5/x)$$

$$\frac{}{a(x).P \xrightarrow{a(v)} P\{v/x\}}$$

$$\frac{}{\bar{a}v.P \xrightarrow{\bar{a}v} P}$$

$$\frac{P \xrightarrow{a(v)} P', Q \xrightarrow{\bar{a}v} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}$$



$$(\bar{a}5.P' | a(x).R') \setminus \{a\}$$

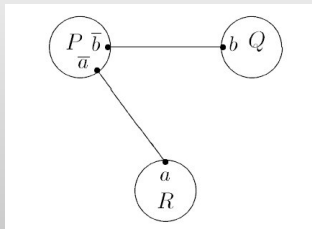
A Calculus of Mobile Processes

$\pi$  - calculus

R. Milner, 1989

Posielanie mien kanálov

# Posielanie iných hodnôt



$$P = \bar{b}a.\bar{b}5.P'$$

$$Q = b(y).b(z).\bar{y}z.Nil$$

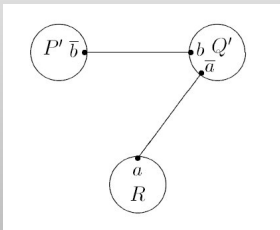
$$(\bar{b}a.\bar{b}5.P' | b(y).b(z).\bar{y}z.Nil | a(x).R') \setminus \{a, b\}$$



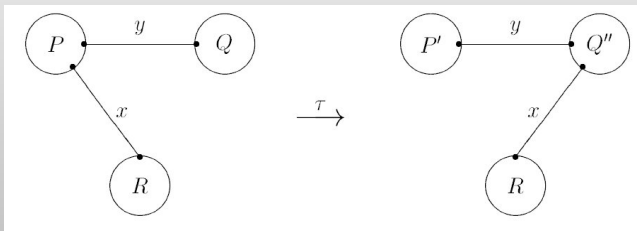
# Posielanie iných hodnôt

Po dvoch komunikáciach dostaneme:

$$(P'|\bar{a}5.Nil|a(x).R') \setminus \{a, b\}$$

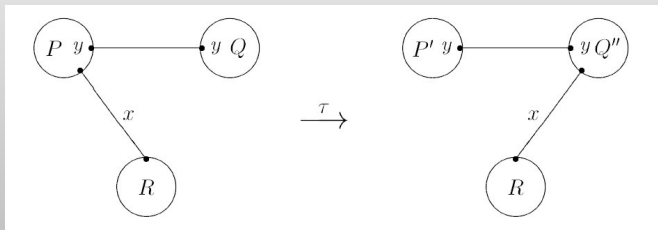


## Posielanie linky

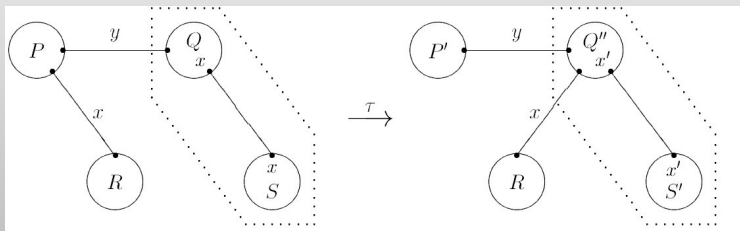


$$\bar{y}_x.P'|y(z).Q'|R \xrightarrow{\tau} P'|Q'\{x/z\}|R$$

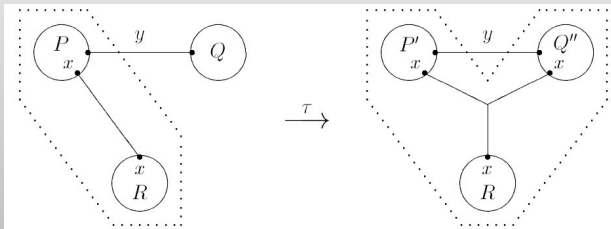
## Posielanie linky



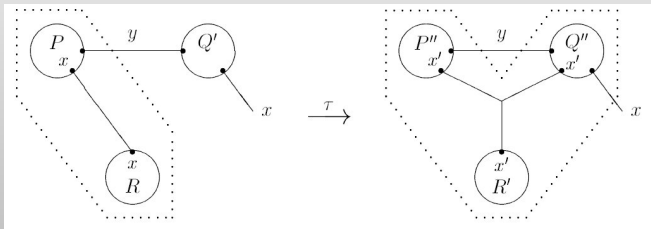
## Zmena rozsahu viazania



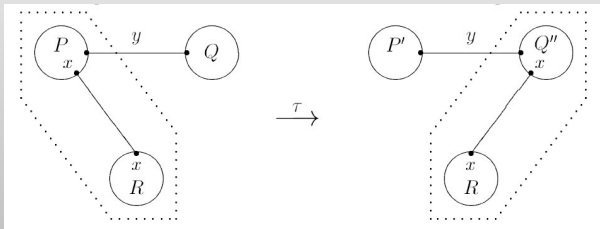
## Zmena rozsahu viazania



## Zmena rozsahu viazania



## Zmena rozsahu viazania



# Iné druhy procesových algebiér

- posielanie procesov
- čas
- trvanie akcií, čas medzi ich vykonaním, timeout a pod.
- pravdepodobnosť
- pravdepodobnosť medzi rovnakými akciami  
( $a.Nil \oplus_{0.2} a.b.Nil + c.Nil$ )
- pravdepodobnosť medzi i rôznymi akciami akciami  
( $a.Nil \oplus_{0.7} c.Nil$ )
- priestor, distribúcia, konzumácia zdrojov, ....